Lösungen - Exponential- und Logarithmusfunktionen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Man isoliert zuerst die Exponentialfunktion auf einer Seite und wendet dann den natürlichen Logarithmus an, der die Umkehrfunktion von e^x ist. Weil e^x immer positiv ist, haben Gleichungen mit negativer rechter Seite keine Lösung.

a) $2x = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{2} \approx 0{,}80$.
b) $\mathrm{e}^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0{,}69$.
c) $-x = \ln 0{,}2 \Rightarrow x = \ln 5 \approx 1{,}61$.
d) Keine Lösung, denn $\mathrm{e}^x > 0$ für alle x.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Ein Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert; daher wird zuerst die Definitionsmenge bestimmt. Dann wendet man die Exponentialfunktion auf beide Seiten an oder fasst Logarithmen mit den Gesetzen zusammen. Lösungen außerhalb der Definitionsmenge werden verworfen.

a) $x > 1$; $x - 1 = \mathrm{e}^2 \Rightarrow x = 1 + \mathrm{e}^2 \approx 8{,}39$.
b) $x > -\frac{1}{2}$; $2x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$.
c) $x > 2$; $x(x-2) = 3 \Rightarrow x = 3$ oder $x = -1$; nur $x = 3$ liegt in der Definitionsmenge.
d) $x > 0$; $\ln x^2 = \ln 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ($x = -4$ entfällt).

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Mit den Logarithmengesetzen werden Differenzen zu Quotienten, Summen zu Produkten und Vorfaktoren zu Exponenten. Danach lässt sich oft ein bekannter Wert wie $\ln 1 = 0$ oder $\mathrm{e}^{\ln a} = a$ verwenden, sodass kein Taschenrechner nötig ist.

a) $\ln \frac{8}{2} = \ln 4 = 2 \ln 2$.
b) $\ln 9 + \ln \frac{1}{9} = \ln 1 = 0$.
c) $\ln 4 + \ln 5 = \ln 20$.
d) $\mathrm{e}^{\ln \frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Mit $z = \mathrm{e}^x$ wird aus der Exponentialgleichung eine quadratische Gleichung in z. Man löst sie mit der Mitternachtsformel oder durch Faktorisieren. Da $z > 0$ gelten muss, werden negative Lösungen verworfen; aus den übrigen folgt $x = \ln z$.

a) $z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = 1$ oder $z = 4$; also $x = 0$ oder $x = \ln 4 \approx 1{,}39$.
b) $z^2 - z - 6 = 0 \Rightarrow z = 3$ oder $z = -2$; $z = -2$ entfällt. $x = \ln 3 \approx 1{,}10$.
c) Multiplikation mit z: $z^2 - 2{,}5z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2$ oder $z = \frac{1}{2}$; $x = \pm \ln 2 \approx \pm 0{,}69$.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Die Ableitungen entstehen mit Kettenregel, Produktregel und Quotientenregel. Bei $\mathrm{e}^{g(x)}$ bleibt die e-Funktion stehen und wird mit der inneren Ableitung multipliziert, bei $\ln g(x)$ ergibt sich $\frac{g'(x)}{g(x)}$.

a) $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-1}$.
b) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$.
c) $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$.
d) $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Für jedes Integral wird eine Stammfunktion bestimmt: Bei e^{ax} teilt man durch a, zu $\frac{1}{x}$ gehört $\ln x$, zu $\ln x$ die Funktion $x \ln x - x$. Dann setzt man die Grenzen ein und vereinfacht mit $\ln \mathrm{e} = 1$.

a) $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2} \approx 3{,}19$.
b) $[\ln x]_1^{\mathrm{e}} = 1 - 0 = 1$.
c) $[x \ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = (\mathrm{e} - \mathrm{e}) - (0 - 1) = 1$.
d) $[\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}]_0^{\ln 2} = (2 - \frac{1}{2}) - (1 - 1) = \frac{3}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Die Verdopplungszeit erhält man aus $\mathrm{e}^{kt} = 2$, also $t = \frac{\ln 2}{k}$. Umgekehrt folgt aus einer Halbwertszeit die Zerfallskonstante $k = \frac{\ln 2}{T_H}$. Beide Formeln entstehen durch Logarithmieren.

a) $T_2 = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$ h.
b) $k = \frac{\ln 2}{8} \approx 0{,}0866$ pro Tag.
c) $\mathrm{e}^{-k \cdot 30} = 2^{-30/8} \approx 7{,}4\,\%$.
d) $\mathrm{e}^{-kt} = 0{,}01 \Rightarrow t = \frac{\ln 100}{k} \approx 53{,}2$ Tage.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Den Anfangswert erhält man für $t = 0$, den Grenzwert für $t \to \infty$, weil der Exponentialterm gegen null geht. Für einen bestimmten Temperaturwert wird nach dem Exponentialterm aufgelöst und logarithmiert. Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist die Ableitung.

a) $T(0) = 80\,^\circ\mathrm{C}$; $T(t) \to 20\,^\circ\mathrm{C}$.
b) $60\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 20 \Rightarrow t = 10 \ln 3 \approx 11{,}0$ min.

c) $T'(t) = -6\mathrm{e}^{-0{,}1t}$; $T'(0) = -6$, $T'(10) = -6\mathrm{e}^{-1} \approx -2{,}21\,^\circ\mathrm{C/min}$.
d) $\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 10\ln 2 \approx 6{,}9$ min.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Das Guthaben nach einer Zeit erhält man durch Einsetzen. Der Vergleich mit jährlicher Verzinsung zeigt den kleinen Vorteil der stetigen Verzinsung. Den effektiven Jahreszins bestimmt man aus dem Wachstumsfaktor nach einem Jahr.

a) *K(10)=2000\mathrm{e}^{0{,}3}\approx2699{,}72\,€*.
b) *2000\cdot1{,}03^{10}\approx2687{,}83\,€*; die stetige Verzinsung bringt etwa *11{,}9\,€* mehr.
c) $\mathrm{e}^{0{,}03} - 1 \approx 3{,}045\,\%$.
d) $\mathrm{e}^{0{,}03t} = 2{,}5 \Rightarrow t = \frac{\ln 2{,}5}{0{,}03} \approx 30{,}5$ Jahre.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Aus der Halbwertszeit folgt die Zerfallskonstante. Der Anteil des noch vorhandenen Kohlenstoffs wird gleich dem Exponentialterm gesetzt; Logarithmieren liefert das Alter. Ein Viertel entspricht genau zwei Halbwertszeiten.

a) $k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}210 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr.
b) $t = \frac{-\ln 0{,}7}{k} \approx 2949$ Jahre.
c) $25\,\% = \left(\frac{1}{2}\right)^2$: nach zwei Halbwertszeiten, also $11\,460$ Jahre.
d) Nach 100 Jahren sind noch $\mathrm{e}^{-kt} \approx 98{,}8\,\%$ vorhanden; die Abnahme ist kleiner als die Messunsicherheit.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Den Luftdruck in einer bestimmten Höhe erhält man durch Einsetzen. Für den halben Druck wird nach h aufgelöst. Die prozentuale Abnahme pro Höhenintervall ergibt sich aus dem konstanten Faktor, der zu diesem Intervall gehört.

a) $p(8849) = 1013\mathrm{e}^{-1{,}106} \approx 335$ hPa.
b) $\mathrm{e}^{-h/8000} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 8000\ln 2 \approx 5545$ m.
c) Faktor $\mathrm{e}^{-1000/8000} \approx 0{,}8825$, also etwa $11{,}8\,\%$ weniger.
d) $p(100) \approx 1000$ hPa; $p(700) \approx 928$ hPa.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die Asymptote folgt aus dem Grenzwert des Exponentialterms. Achsenschnittpunkte erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ bzw. Nullsetzen der Funktion. Monotonie zeigt man mit dem Vorzeichen der Ableitung; zuletzt wird der Graph aus e^x durch Abbildungen erzeugt.

a) Für $x \to \infty$ gilt $\mathrm{e}^{-x} \to 0$, also $f(x) \to 3$: Asymptote $y = 3$.
b) $f(0) = 1$. $3 - 2\mathrm{e}^{-x} = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-x} = 1{,}5 \Rightarrow x = -\ln 1{,}5 \approx -0{,}405$.
c) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} > 0$.

d) $W_f = (-\infty; 3)$, denn f wächst streng monoton von $-\infty$ gegen 3.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Bei Grenzwerten mit Exponential- und Potenzfunktionen gilt: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer als jede Potenz. Mit dieser Faustregel bestimmt man, welcher Faktor das Verhalten bestimmt.

a) $= \lim \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$, denn e^x wächst schneller als jede Potenz.
b) $= 0$: Der Faktor x geht gegen 0 schneller, als $\ln x$ gegen $-\infty$ geht.
c) $= 0$, denn $\ln x$ wächst langsamer als jede Wurzel.
d) $= \infty$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Zuerst prüft man durch Einsetzen, dass der Punkt auf dem Graphen liegt. Die Tangente hat die Steigung $f'(x_0)$ und geht durch den Punkt. Die Normale steht senkrecht darauf, ihre Steigung ist der negative Kehrwert.

a) $f(\mathrm{e}) = 1$. $f'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$; Tangente $y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1 = \frac{x}{\mathrm{e}}$.
b) Für $x = 0$ gilt $y = 0$.
c) Steigung der Normalen $-\mathrm{e}$: $y = -\mathrm{e}(x - \mathrm{e}) + 1$. Für $y = 0$: $x = \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 3{,}09$.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Nullstelle folgt aus dem Faktor x, weil e^{-x} nie null ist. Ableitungen entstehen mit der Produktregel; der Faktor e^{-x} wird ausgeklammert. Extrem- und Wendepunkte ergeben sich aus den Nullstellen der Ableitungen, die Fläche aus einer Stammfunktion.

a) $x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$. Für $x \to \infty$: $f \to 0$; für $x \to -\infty$: $f \to -\infty$.
b) $f'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, $f''(1) = -\mathrm{e}^{-1}$: Hochpunkt .
c) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ mit Vorzeichenwechsel: Wendepunkt .
d) Stammfunktion $F(x) = -(x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ (Probe: $F' = -\mathrm{e}^{-x} + (x + 1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$).
$A = F(1) - F(0) = -2\mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264$ FE.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Die Ableitung zeigt die Extremstelle, die zweite Ableitung die Konvexität. Die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs bestimmen zusammen mit dem Minimum die Wertemenge. Die Tangente wird mit Punkt und Steigung aufgestellt.

a) $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$; Vorzeichenwechsel $- \to +$: Tiefpunkt $T(1|1)$.
b) $g''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ für alle $x > 0$.
c) Für $x \to 0^+$: $-\ln x \to \infty$, also $g \to \infty$. Für $x \to \infty$: x dominiert, $g \to \infty$. Wertemenge $[1; \infty)$.

d) $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 1$, $g'(\mathrm{e}) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$: $y = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)(x - \mathrm{e}) + \mathrm{e} - 1 = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)x$.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Nach jeweils sechs Stunden ist von jeder Dosis nur der Anteil $\mathrm{e}^{-0{,}6}$ übrig. Die Konzentrationen nach mehreren Gaben bilden eine geometrische Summe. Deren Grenzwert ist die Konzentration, auf die sich der Körper langfristig einpendelt.

a) $\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}5488$, also etwa $54{,}9\,\%$.
b) 2. Dosis: $c_0(1 + q) \approx 1{,}549c_0$; 3. Dosis: $c_0(1 + q + q^2) \approx 1{,}850c_0$ mit $q = \mathrm{e}^{-0{,}6}$.
c) Geometrische Reihe: $c_0(1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{c_0}{1-q} \approx 2{,}216c_0$.
d) $\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 0{,}1 \Rightarrow t = 10 \ln 10 \approx 23{,}0$ h.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Den Anfangswert erhält man für $t = 0$, die Schranke als Grenzwert. Zeitpunkte für eine bestimmte Vokabelzahl folgen durch Logarithmieren. Die Ableitung beschreibt die Lerngeschwindigkeit, die mit der Zeit abnimmt.

a) $B(0) = 10$; $B(t) \to 100$.
b) $B'(t) = 18\mathrm{e}^{-0{,}2t}$; $B'(0) = 18$ Vokabeln pro Tag.
c) $90\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 20 \Rightarrow t = 5 \ln 4{,}5 \approx 7{,}52$ Tage.
d) $\mathrm{e}^{-0{,}2t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 5 \ln 2 \approx 3{,}47$ Tage.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Für den Tiefpunkt wird die Ableitung null gesetzt; dabei wird a wie eine Zahl behandelt. Aus den Koordinaten des Tiefpunkts eliminiert man a und erhält die Ortskurve. Berühren der x-Achse bedeutet, dass der Tiefpunkt auf ihr liegt.

a) $f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a = 0 \Rightarrow x = \ln a$; $f_a'' = \mathrm{e}^x > 0$: .
b) Aus $x = \ln a$ folgt $a = \mathrm{e}^x$; also $y = \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x = (1 - x)\mathrm{e}^x$.
c) Berührung: $a - a \ln a = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = \mathrm{e}$.
d) Der Tiefpunkt liegt unterhalb der Achse, wenn $a(1 - \ln a)$, also für $a > \mathrm{e}$. Wegen $f_a(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ gibt es dann genau zwei Nullstellen.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Schnittstellen erhält man durch Gleichsetzen der Funktionen. Die Fläche ist das Integral der Differenz von oberer und unterer Funktion. Für unbegrenzte Flächen wird ein Grenzwert der Integralfunktion gebildet.

a) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow \mathrm{e}^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$.
b) $A = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,dx = [\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}]_0^1 = \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 2 \approx 1{,}086$ FE.
c) $\lim_{b\to\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-b}\right) = 1$: Die unendlich lange Fläche unter e^{-x} hat den endlichen Inhalt 1.

Lösung zu Aufgabe 21

Lösungsweg: Jede Aussage wird mit den Rechengesetzen oder einem Gegenbeispiel geprüft. Logarithmengesetze gelten für Produkte und Quotienten, nicht für Summen. Für Aussagen über Lösungen und Asymptoten hilft eine Skizze der Graphen.

a) Falsch: $a = b = 1$ liefert $\ln 2 \neq 0$. Richtig ist $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
b) Wahr (Potenzgesetz).
c) Falsch: Für x hat e^x einen Schnittpunkt mit x^2: $h(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ ist bei $x = 0$ positiv1() und bei $x = -1$ negativ $(0{,}37 - 1)$, also gibt es eine Lösung (etwa $x \approx -0{,}70$).
d) Falsch: Der Graph wächst unbeschränkt (langsam), hat aber die senkrechte Asymptote $x = 0$.