Lösungen zur Klassenarbeit - Ebenen im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Aus den drei Punkten bildet man zwei Spannvektoren und erhält die Parameterform (eine BE). Das Kreuzprodukt der Spannvektoren liefert einen Normalenvektor, der gekürzt wird; mit einem Punkt erhält man die Koordinatenform (drei BE). Die Punktprobe erfolgt durch Einsetzen in die Koordinatenform und einen kurzen Antwortsatz (eine BE).

a) $E: \vec{x} = (2|0|0)^T + r \cdot (-2|4|0)^T + s \cdot (-2|0|2)^T$. (1 BE)

b) , gekürzt $(2|1|2)^T$; $d = 4$: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$. (3 BE)

c) $2 + 2 + 0 = 4$ ✓: $P \in E$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Für die Spurpunkte setzt man jeweils zwei Koordinaten null und löst nach der dritten auf; jeder Spurpunkt bringt eine Bewertungseinheit. Die Punktprobe erfolgt durch Einsetzen in die Ebenengleichung (eine BE). Den Normalenvektor liest man direkt an den Koeffizienten der Koordinatenform ab (eine BE).

a) $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|3|0)$, $S_3(0|0|3)$. (3 BE)
b) $2 + 2 + 2 = 6$ ✓. (1 BE)
c) $\vec{n} = (1|2|2)^T$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren wird komponentenweise berechnet und mit dem Skalarprodukt kontrolliert (zwei BE). Den Wert der rechten Seite erhält man, indem man den Stützpunkt in die linke Seite einsetzt; damit steht die Koordinatenform fest (zwei BE). Eine Probe mit einem weiteren Punkt ist empfehlenswert. Kontrolle: Der Punkt für $r = s = 1$, also $(1|2|3)$, erfüllt $2 - 4 + 3 = 1$. Häufiger Fehler ist ein Vorzeichenfehler in der mittleren Komponente des Kreuzprodukts.

a) . (2 BE)

b) $d = \vec{n} \circ (0|0|1)^T = 1$: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Der Punkt mit Parameter wird in die Koordinatenform eingesetzt; die entstehende lineare Gleichung liefert a (zwei BE). Für die Seitenfrage setzt man beide Punkte in die linke Seite ein und vergleicht mit der rechten Seite. Liegen die Werte auf verschiedenen Seiten von d, liegen die Punkte auf verschiedenen Seiten der Ebene (zwei BE).

a) $2 - a + 3 = 7 \Rightarrow a = -2$. (2 BE)
b) Q: 0; R: $5 + 3 = 8 > 7$. Verschiedene Seiten. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: In der Gleichung fehlen x_1 und x_2; die Ebene ist deshalb waagerecht und parallel zur x_1x_2-Ebene. Eine Parameterform erhält man mit einem Punkt der Höhe 4 und zwei Spannvektoren in Richtung der x_1- und der x_2-Achse. Für Beschreibung und Parameterform gibt es je eine Bewertungseinheit. Kontrolle: Jeder Punkt der Parameterform hat unabhängig von r und s die dritte Koordinate 4 und erfüllt damit die Gleichung.

Waagerechte Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene in der Höhe 4:
$\vec{x} = (0|0|4)^T + r \cdot (1|0|0)^T + s \cdot (0|1|0)^T$. (2 BE)