Lernzettel - Ebenen im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Das neue Dach der Turnhalle

Die Turnhalle eines Gymnasiums in Nürnberg bekommt ein schräges Pultdach mit Solaranlage. Für die Planung haben die Vermesser drei Eckpunkte der Dachfläche eingemessen. Der Architekt möchte wissen: Liegt der geplante Lüftungsschacht genau in der Dachfläche oder ragt er heraus? Wie steil ist das Dach, und in welche Richtung zeigt es?

Eine ebene Fläche wie dieses Dach wird mathematisch durch eine Ebene beschrieben. Während eine Gerade eine einzige Richtung hat, braucht eine Ebene zwei Richtungen. Ebenso wichtig ist ein Vektor, der senkrecht auf ihr steht: der Normalenvektor. Er führt zur kompakten Koordinatenform, mit der man Punktproben, Spurpunkte und später Schnitte und Abstände schnell berechnet.

Wie beschreibt man eine Ebene?

Definition: Parameterform

Eine Ebene im Raum ist durch einen Punkt und zwei nicht parallele Richtungen festgelegt, oder durch einen Punkt und eine Richtung, die senkrecht auf ihr steht. Daraus ergeben sich drei Darstellungen, die Sie ineinander umrechnen können müssen: die **Parameterform**, die **Normalenform** und die **Koordinatenform**. Im Abitur wird meist die Koordinatenform verwendet, weil sie sich am besten für Punktproben, Schnitte und Abstände eignet.

Parameterform

Definition: Spannvektoren

$E:\ \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\vec{p}$ der Stützvektor (Ortsvektor eines Punkts der Ebene), $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die **Spannvektoren**; sie dürfen nicht parallel sein. Durch drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, erhält man

.

Normalenvektor und Kreuzprodukt

Definition: Normalenvektor

Ein Vektor $\vec{n}$ ist **Normalenvektor** der Ebene, wenn er senkrecht auf beiden

Spannvektoren steht. Man berechnet ihn mit dem Kreuzprodukt

. Beispiel: , liefert . Zur

Kontrolle prüft man $\vec{n} \circ \vec{u} = 6 - 6 + 0 = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{v} = 0 - 3 + 3 = 0$. Jedes Vielfache von $\vec{n}$ ist ebenfalls ein Normalenvektor; man darf kürzen.

Normalen- und Koordinatenform

Normalenform: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$. Ausmultiplizieren ergibt die Koordinatenform $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ mit $d = \vec{n} \circ \vec{p}$. Beispiel: $\vec{n} = (2|-1|3)^T$, $P(1|2|0)$: $d = 2 - 2 + 0 = 0$, also $E:\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$. Die Koeffizienten vor x_1, x_2, x_3 sind die Koordinaten eines Normalenvektors. Eine Punktprobe geschieht durch Einsetzen: Für $E:\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ gilt für $Q(2|1|2)$: $2 + 2 - 2 = 2$ ✓, also $Q \in E$; für $P(1|2|1)$: $1 + 4 - 1 = 4 \neq 2$, also $P \notin E$.

Satz: Koordinatenform

Eine Ebene mit Normalenvektor durch den Punkt P hat die Gleichung

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit $d = \vec{n} \cdot \vec{p}$.

Ebene durch drei Punkte

Gegeben sind $A(1|0|0)$, $B(0|2|0)$, $C(0|0|3)$. Spannvektoren: ,

. Kreuzprodukt: . $d = \vec{n} \circ \vec{a} = 6$.

Koordinatenform: $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$. Kontrolle mit B: 6 ✓, mit C: 6 ✓.

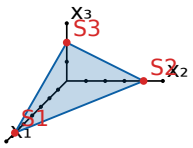
So gehst du vor: Ebene durch drei Punkte

1. Spannvektoren und bestimmen.
2. Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ berechnen.
3. Koordinatenform $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ aufstellen; d durch Einsetzen von A.
4. Probe mit den Punkten B und C.

Spurpunkte und Lage im Koordinatensystem

Definition: Spurgeraden

Aus der Koordinatenform $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$ erhält man die Spurpunkte, indem man jeweils zwei Koordinaten null setzt: $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|2)$. Das Dreieck $S_1S_2S_3$ hilft beim Zeichnen der Ebene. Die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen heißen **Spurgeraden**, zum Beispiel S_1S_2 in der x_1x_2-Ebene.



Fehlt in der Koordinatenform eine Koordinate, ist die Ebene parallel zur zugehörigen Achse. So ist $x_1 + x_2 = 2$ parallel zur x_3-Achse. Eine Gleichung wie $x_3 = 4$ beschreibt eine zur x_1x_2-Ebene parallele Ebene, $x_1 = 0$ ist die x_2x_3-Ebene selbst.

Beispiel 1: aus dem Abitur: Seitenfläche einer Pyramide

Eine Pyramide hat die Spitze $S(0|0|4)$ und die quadratische Grundfläche mit den Ecken $O(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|4|0)$, $D(0|4|0)$. Gesucht ist die Ebene E, in der die Seitenfläche SBC liegt. Die Spannvektoren sind und . Das Kreuzprodukt ergibt $\vec{n} = (16|0|16)^T$, gekürzt $(1|0|1)^T$. Mit $d = \vec{n} \circ \vec{s} = 4$ lautet die Koordinatenform $x_1 + x_3 = 4$. Weil x_2 fehlt, ist die Seitenfläche parallel zur x_2-Achse, was zur Lage der Kante BC passt. Die Punktprobe mit B und C bestätigt das Ergebnis: $4 + 0 = 4$.

Von der Koordinatenform zur Parameterform

Gegeben ist $E:\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$. Man wählt drei Punkte der Ebene, am einfachsten die Spurpunkte $A(4|0|0)$, $B(0|2|0)$ und $C(0|0|4)$. Die Spannvektoren sind und . Damit ist $E:\ \vec{x} = (4|0|0)^T + r(-4|2|0)^T + s(-4|0|4)^T$. Die Probe erfolgt durch Einsetzen von $r = 1$, $s = 0$ (Punkt B) und $r = 0$, $s = 1$ (Punkt C) in die Koordinatenform. Hat die Ebene keine drei Spurpunkte (zum Beispiel weil sie durch den Ursprung geht), wählen Sie andere einfache Punkte, indem Sie zwei Koordinaten frei wählen und die dritte ausrechnen.

Umformungen im Überblick

Regel: Umformungen im Überblick

- **Parameterform** $\rightarrow$ **Koordinatenform:** Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt,

$d = \vec{n} \circ \vec{p}$.

- **Koordinatenform → Parameterform:** Drei Punkte (zum Beispiel Spurpunkte) bestimmen und Spannvektoren bilden.
- **Normalenform → Koordinatenform:** Skalarprodukt ausrechnen.

Weitere Beispiele

Beispiel 2: Ebene aus drei Punkten

Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene durch $A(1|0|0)$, $B(0|2|0)$, $C(0|0|3)$.

, . . Mit A: $d = 6$. Ebene:

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$.

Beispiel 3: Punktprobe

Liegt $P(1|0|0{,}5)$ in der Ebene E: $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$?

$6 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 0{,}5 = 7 \neq 6$. Nein, P liegt nicht in E.

Ebenen im Schrägbild darstellen

Um sich eine Ebene vorzustellen, zeichnet man ihre Spurpunkte auf den Koordinatenachsen in ein Schrägbild und verbindet sie zu einem Dreieck. Die Seiten dieses Dreiecks sind die Spurgeraden, also die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen. Liegt ein Spurpunkt „unendlich weit“ entfernt, weil eine Koordinate in der Koordinatenform fehlt, verlaufen zwei Spurgeraden parallel zu der entsprechenden Achse.

Beispiel 4: Spurpunkte und Spurgeraden

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Ebene $E: \; 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$ und beschreiben Sie das Spurdreieck.

$x_2 = x_3 = 0$: $3x_1 = 12 \Rightarrow S_1(4|0|0)$. Ebenso $S_2(0|6|0)$ und $S_3(0|0|2)$. Das Dreieck $S_1S_2S_3$ liegt im ersten Oktanten; die Ebene schneidet die x_3-Achse am niedrigsten, sie ist also eher flach geneigt. Die Spurgerade in der x_1x_2-Ebene hat dort die Gleichung $3x_1 + 2x_2 = 12$.

Auf welcher Seite liegt ein Punkt?

Setzt man einen Punkt in die linke Seite der Koordinatenform ein, erhält man eine Zahl. Ist sie gleich d, liegt der Punkt in der Ebene. Ist sie größer, liegt er auf der Seite, in die der Normalenvektor zeigt; ist sie kleiner, auf der anderen Seite. So lässt sich zum Beispiel

prüfen, ob ein Schornstein über eine Dachfläche hinausragt oder ob zwei Punkte auf derselben Seite einer Wand liegen.

Beispiel 5: Ragt der Schacht heraus?

Die Dachfläche liegt in $E:\ x_1 + 4x_3 = 40$ (in m, $\vec{n}$ zeigt nach oben). Die Oberkante eines Lüftungsschachts ist $P(8|5|8{,}5)$. Ragt der Schacht aus dem Dach?

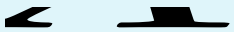
$8 + 4 \cdot 8{,}5 = 42 > 40$. P liegt auf der Seite, in die $\vec{n} = (1|0|4)^T$ zeigt, also oberhalb des Dachs. Über dem Grundrisspunkt $(8|5)$ liegt das Dach in der Höhe $x_3 = \frac{40-8}{4} = 8$ m; der Schacht ragt $0{,}5$ m heraus.

Besondere Ebenen erkennen

Viele Ebenen in Anwendungen stehen senkrecht oder waagerecht. Eine Wand parallel zur x_3-Achse hat eine Gleichung ohne x_3, etwa $x_1 + x_2 = 10$. Ein waagerechter Boden in 3 m Höhe ist $x_3 = 3$. Die Koordinatenebenen selbst sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$. Wer diese Formen erkennt, spart sich lange Rechnungen.

Beispiel 6: Eine senkrechte Wand

Eine Wand steht senkrecht auf dem Boden und verläuft durch die Bodenpunkte $A(6|0|0)$ und $B(0|4|0)$. Bestimmen Sie eine Koordinatenform.



Spannvektoren: und die Senkrechte $(0|0|1)^T$. Kreuzprodukt: $(4 \cdot 1 - 0|0 - (-6) \cdot 1|0)^T = (4|6|0)^T$, gekürzt $(2|3|0)^T$. Mit A: $2x_1 + 3x_2 = 12$. Die Variable x_3 fehlt, wie bei jeder senkrechten Wand.

Wusstest du? Warum ein Hocker mit drei Beinen nie wackelt

Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen immer genau eine Ebene. Deshalb steht ein dreibeiniger Melkschemel oder ein Kamerastativ auch auf unebenem Boden stabil. Bei vier Beinen müssen die vier Fußpunkte zufällig in einer Ebene liegen, sonst wackelt der Tisch. Vermesser nutzen dasselbe Prinzip: Drei eingemessene Punkte genügen, um eine ebene Fläche festzulegen.

Welche Darstellung wofür?

Jede Darstellungsform einer Ebene hat ihre Stärken. Die Parameterform eignet sich, wenn Punkte der Ebene erzeugt werden sollen, etwa beim Zeichnen oder beim Beschreiben einer begrenzten Fläche wie eines Dreiecks mit Bedingungen an die Parameter. Die Koordinatenform ist ideal für Punktproben, Spurpunkte, Schnitte mit Geraden und Abstandsberechnungen, weil man nur einsetzen muss. Die Normalenform verbindet beide Sichtweisen und zeigt direkt die Richtung, in die die Ebene „schaut“. In Abituraufgaben lohnt es sich deshalb fast immer, eine gegebene Parameterform zuerst in die

Koordinatenform umzuwandeln. Dazu berechnet man das Kreuzprodukt der Spannvektoren, kürzt den Normalenvektor auf möglichst kleine ganze Zahlen und setzt einen Punkt ein. Eine kurze Probe mit einem zweiten Punkt der Ebene schützt vor Vorzeichenfehlern, die beim Kreuzprodukt besonders häufig vorkommen. Wer zusätzlich die Spurpunkte einzeichnet, erhält eine anschauliche Vorstellung von der Lage der Ebene im Raum. Diese Arbeitsweise spart in der Prüfung viel Zeit und schafft Sicherheit bei allen folgenden Teilaufgaben.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Parameterform $E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$: ein Stützvektor und zwei Spannvektoren, die keine Vielfachen voneinander sind; drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen genau eine Ebene.
- Kreuzprodukt steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$; Kontrolle mit dem Skalarprodukt.
- Normalenform $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$; ausmultipliziert ergibt sich die Koordinatenform $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ mit $d = \vec{n} \circ \vec{p}$.
- Von der Koordinatenform zur Parameterform: drei Punkte der Ebene ablesen (zum Beispiel Spurpunkte) oder zwei Variablen als Parameter wählen.
- Spurpunkte: zwei Koordinaten null setzen; die Verbindungslinien der Spurpunkte (Spurgeraden) zeigen die Lage der Ebene im Schrägbild.
- Sonderlagen: Fehlt x_i in der Koordinatenform, ist die Ebene parallel zur x_i-Achse; $x_3 = c$ ist parallel zur x_1x_2-Ebene; $d = 0$ bedeutet, dass der Ursprung in der Ebene liegt.
- Punktprobe in Koordinatenform: Einsetzen; ist die Gleichung erfüllt, liegt der Punkt in der Ebene. Das Vorzeichen von $\vec{n} \circ \vec{x} - d$ zeigt, auf welcher Seite er liegt.
- Vier Punkte liegen in einer Ebene, wenn der vierte die Gleichung der Ebene durch die ersten drei erfüllt.

Achtung: Typische Fehler

- Beim Kreuzprodukt Vorzeichen oder Reihenfolge verwechseln ($\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$).
- Normalenvektor nicht kontrollieren: Immer $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ prüfen.
- d mit dem falschen Punkt oder falschem Vorzeichen berechnen.
- Spurpunkte vergessen, die gleichzeitig Achsenschnittpunkte sind.

Ottos Tipp: Setze am Ende jeden der drei Punkte in deine Koordinatenform ein. Wenn alle drei passen, ist die Ebene richtig!

Ottos Tipp

Rechnen Sie nach jedem Kreuzprodukt die Probe $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Das kostet zehn Sekunden und schützt vor dem häufigsten Folgefehler.