Arbeitsblatt - Ebenen im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Ebenen aus drei Punkten

Stellen Sie jeweils eine Parametergleichung der Ebene durch die drei Punkte auf oder begründen Sie, warum es keine eindeutige Ebene gibt.

a) $A(1|0|2)$, $B(3|1|0)$, $C(0|2|5)$
b) $P(1|1|1)$, $Q(2|3|4)$, $R(4|7|10)$
c) Geben Sie zu a) einen weiteren Punkt der Ebene an.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Das Kreuzprodukt

Berechnen Sie $\vec{u} \times \vec{v}$ und prüfen Sie mit dem Skalarprodukt, dass das Ergebnis auf beiden Vektoren senkrecht steht.

a) ,

b) ,

c) ,

d) Was ergibt $\vec{u} \times \vec{u}$? Begründen Sie.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Von der Normalenform zur Koordinatenform

Eine Ebene geht durch $P(2|-1|3)$ und hat den Normalenvektor .

a) Geben Sie die Normalenform an.
b) Bestimmen Sie die Koordinatenform.
c) Prüfen Sie, ob $Q(1|1|0)$ in der Ebene liegt.
d) Geben Sie eine zu E parallele Ebene durch den Ursprung an.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Von der Parameterform zur Koordinatenform

Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatenform der Ebene.

a)



b)

c) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis zu a) mit dem Punkt für $r = s = 1$.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Von der Koordinatenform zur Parameterform

Gegeben ist $E:\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$.

a) Bestimmen Sie die Spurpunkte.
b) Stellen Sie mit den Spurpunkten eine Parameterform auf.
c) Stellen Sie eine zweite Parameterform auf, indem Sie $x_1 = r$ und $x_3 = s$ setzen.
d) Prüfen Sie, dass beide Spannvektoren aus c) senkrecht zu $\vec{n}$ sind.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Spurpunkte und Sonderlagen

Bestimmen Sie die Spurpunkte und beschreiben Sie die Lage der Ebene im Koordinatensystem.

a) $E_1:\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$
b) $E_2:\ x_1 + 2x_3 = 4$
c) $E_3:\ x_2 = 3$
d) $E_4:\ x_1 - x_2 = 0$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Punktproben

Gegeben ist $E:\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7$.

a) Prüfen Sie, ob $A(1|-2|1)$, $B(2|0|1)$ und $C(0|5|4)$ in E liegen.
b) Bestimmen Sie a so, dass $P(a|1|2)$ in E liegt.
c) Welche Punkte liegen auf derselben Seite von E wie der Ursprung?
d) Geben Sie den Schnittpunkt von E mit der x_3-Achse an.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Das Pultdach der Turnhalle

Die Dachfläche einer Turnhalle (Pultdach) ist ein Rechteck mit den Ecken $A(0|0|6)$, $B(12|0|6)$, $C(0|8|10)$ und D (in m).

a) Bestimmen Sie die vierte Ecke D.
b) Stellen Sie eine Koordinatenform der Dachebene auf.
c) Ein Lüftungsschacht endet im Punkt $P(6|5|9)$. Ragt er aus dem Dach?
d) Wie hoch liegt das Dach über dem Grundrisspunkt $(6|5)$?
e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Das Solarmodul

Auf einem Flachdach wird ein Solarmodul aufgeständert. Seine Ecken liegen bei $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|1|0{,}5)$ und $D(0|1|0{,}5)$ (in m). Die Sonnenstrahlen fallen mittags aus Richtung $\vec{s} = (0|-1|-2)^T$ ein.

a) Zeigen Sie, dass $ABCD$ ein Rechteck ist.
b) Bestimmen Sie einen Normalenvektor des Moduls und eine Koordinatenform seiner Ebene.
c) Ein Modul liefert die meiste Energie, wenn die Strahlen senkrecht auftreffen. Prüfen Sie, ob $\vec{s}$ parallel zum Normalenvektor ist.
d) Wie müsste die obere Kante CD liegen, damit die Strahlen senkrecht einfallen (Kantenlänge bleibt $\sqrt{1{,}25}$ m)?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das Zelt

Ein Zelt hat einen quadratischen Boden mit den Ecken $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|4|0)$, $D(0|4|0)$ und die Spitze $S(2|2|3)$ (in m).

a) Stellen Sie eine Koordinatenform der Seitenwand ABS auf.
b) Geben Sie ohne neue Rechnung die Gleichung der gegenüberliegenden Wand CDS an (Symmetrie).
c) Liegt der Punkt $P(2|1|1{,}5)$ in der Wand ABS? Liegt er innerhalb des Zelts?
d) Wie hoch ist das Zelt im Abstand $0{,}5$ m von der Wand AB ($x_2 = 0{,}5$)?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Skaterrampe

Im Jugendzentrum wird eine Skaterrampe gebaut. Die schräge Fahrfläche ist ein Rechteck mit den Ecken $A(0|0|0)$, $B(0|4|0)$, $C(3|0|1)$ und D (in m).

a) Bestimmen Sie D und eine Koordinatenform der Fahrfläche.
b) Wie hoch ist die Rampe $1{,}8$ m vom unteren Rand entfernt ($x_1 = 1{,}8$)?

c) Berechnen Sie die Länge der Fahrfläche von A bis C entlang der Steigung und die Steigung in Prozent.
d) Eine Kiste mit Oberkante $K(2|2|0{,}6)$ steht unter der Rampe. Passt sie darunter?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Das Hanggrundstück

Familie Köhler hat im Schwarzwald ein Grundstück am Hang gekauft. Ein Vermesser hat drei Geländepunkte eingemessen: $P_1(0|0|210)$, $P_2(40|0|214)$, $P_3(0|30|204)$ (in m, x_3 ist die Höhe über dem Meer). Der Hang wird als eben angenommen.

a) Stellen Sie eine Koordinatenform der Hangebene auf.
b) Berechnen Sie die Geländehöhe im Punkt $(20|15)$.
c) Für die Terrasse wird der Bereich um $(20|15)$ waagerecht auf 211 m Höhe gebracht. Muss dort aufgeschüttet oder abgetragen werden, und wie viel?
d) In welche Richtung fällt der Hang am stärksten ab? (Hinweis: Betrachten Sie die ersten beiden Koordinaten des Normalenvektors.)

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Ebene aus Gerade und Punkt

Gegeben sind die Gerade  und der Punkt $P(3|1|4)$.

a) Zeigen Sie, dass P nicht auf g liegt.
b) Stellen Sie eine Parameterform der Ebene E auf, die g und P enthält.
c) Bestimmen Sie eine Koordinatenform von E.
d) Prüfen Sie, ob die Gerade $h:\ \vec{x} = (3|1|4)^T + s \cdot (1|2|0)^T$ in E liegt.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Ebene aus zwei Geraden

Gegeben sind $g:\ \vec{x} = (1|1|0)^T + r \cdot (1|0|1)^T$ und $h:\ \vec{x} = (3|0|1)^T + s \cdot (0|1|1)^T$. Sie schneiden sich in $S(3|1|2)$.

a) Bestätigen Sie den Schnittpunkt.
b) Stellen Sie die Ebene auf, die beide Geraden enthält.
c) Bestimmen Sie die Koordinatenform.
d) Warum kann man aus zwei windschiefen Geraden keine Ebene bilden?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Das Walmdach

Ein Haus mit rechteckigem Grundriss hat ein Walmdach. Die Traufecken liegen bei $A(0|0|6)$, $B(12|0|6)$, $C(12|8|6)$, $D(0|8|6)$, der First verläuft von $F_1(4|4|9)$ bis $F_2(8|4|9)$ (in

m).

a) Bestimmen Sie Koordinatenformen der Dachflächen ABF_2F_1 (Trapez) und BCF_2 (Dreieck).
b) Zeigen Sie, dass auch F_1 in der Ebene der Trapezfläche liegt.
c) Ein Antennenmast trifft die Trapezfläche über dem Punkt $(6|2)$. In welcher Höhe?
d) Berechnen Sie die Höhe des Trapezes (Abstand der Traufe AB zum First) und den Flächeninhalt der Trapezfläche.
e) Wie viel Dachfläche hat das Haus insgesamt? (Die gegenüberliegenden Flächen sind gleich groß.)

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Rollstuhlrampe

Vor dem Eingang des Rathauses wird eine Rollstuhlrampe gebaut. Nach der Norm DIN 18040 darf sie höchstens $6\,\%$ Steigung haben. Die Rampe soll eine Höhe von $0{,}48$ m überwinden und $1{,}2$ m breit sein. Der untere Rand liegt auf der x_2-Achse von $(0|0|0)$ bis $(0|1{,}2|0)$, die Rampe steigt in x_1-Richtung.

a) Wie lang muss die Rampe in x_1-Richtung mindestens sein?
b) Stellen Sie für diese Länge eine Koordinatenform der Rampenebene auf.
c) Wie hoch ist die Rampe nach 3 m?
d) Ein Architekt schlägt vor, die Rampe schräg anzulegen, sodass der obere Rand bei $x_1 = 6$ und um 2 m seitlich versetzt liegt. Beurteilen Sie, ob die Steigung entlang der Fahrtrichtung dann zulässig ist.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Die Glaspyramide

Vor einem Museum steht eine Glaspyramide mit quadratischer Grundfläche: $A(-5|-5|0)$, $B(5|-5|0)$, $C(5|5|0)$, $D(-5|5|0)$, Spitze $S(0|0|8)$ (in m).

a) Bestimmen Sie Koordinatenformen der vier Seitenflächen (Symmetrie nutzen).
b) Ein Scheinwerfer hängt im Punkt $L(1|2|4)$. Liegt er innerhalb der Pyramide?
c) In welcher Höhe trifft eine senkrechte Stange über dem Punkt $(2|-3)$ das Glas?
d) Berechnen Sie die gesamte Glasfläche (Höhe einer Seitenfläche über $\sqrt{5^2+8^2}$).

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Eine Ebenenschar

Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}$ die Ebenenschar $E_a:\ ax_1 + x_2 + x_3 = 2a$.

a) Für welches a enthält E_a den Punkt $P(1|2|3)$?
b) Welche Ebene der Schar ist parallel zur x_1-Achse?
c) Zeigen Sie: Alle Ebenen der Schar enthalten die Gerade $g:\ \vec{x} = (2|0|0)^T + t\cdot(0|1|-1)^T$.
d) Gibt es eine Ebene der Schar, die zur Ebene $x_1 = 0$ parallel ist? Begründen Sie.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Der wackelnde Tisch

Ein Esstisch steht auf vier Beinen. Die Fußpunkte liegen bei $A(0|0|0)$, $B(120|0|0)$, $C(120|80|0)$ und $D(0|80|0{,}6)$ (in cm), weil der Fußboden in der Altbauwohnung uneben ist. Die Tischplatte bleibt dabei waagerecht.

a) Zeigen Sie, dass die vier Fußpunkte nicht in einer Ebene liegen.
b) Bestimmen Sie die Ebene durch A, B und D und prüfen Sie, wie weit C über oder unter ihr liegt (in x_3-Richtung).
c) Erklären Sie, warum ein Tisch mit drei Beinen nie wackelt.
d) Um welche Länge müsste man ein Bein kürzen oder unterlegen, damit der Tisch auf diesem Boden nicht mehr wackelt?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Die Achsenabschnittsform (Knobelaufgabe)

Eine Ebene schneidet die Koordinatenachsen in $S_1(a|0|0)$, $S_2(0|b|0)$, $S_3(0|0|c)$ mit $a, b, c > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $E:\ \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$ eine Gleichung dieser Ebene ist.
b) Bringen Sie $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$ auf diese Form und lesen Sie die Spurpunkte ab.
c) Die Ebene und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide. Zeigen Sie: $V = \frac{abc}{6}$.
d) Unter allen Ebenen durch $P(1|1|1)$ mit positiven Achsenabschnitten soll die mit dem kleinsten Pyramidenvolumen gefunden werden. Begründen Sie mit der Symmetrie, dass $a = b = c$ gilt, und berechnen Sie V.