Lösungen - Ebenen im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Aus drei Punkten bildet man zwei Verbindungsvektoren, die von demselben Punkt ausgehen. Sind sie keine Vielfachen, spannen sie die Ebene auf; der Ausgangspunkt dient als Stützvektor. Sind sie Vielfache, liegen die Punkte auf einer Geraden, und es gibt keine eindeutige Ebene.

a) , sind keine Vielfachen:

.

b) , . Die Punkte liegen auf einer Geraden; durch sie

gehen unendlich viele Ebenen.
c) Zum Beispiel $r = s = 1$: $D(2|3|3)$.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Das Kreuzprodukt wird komponentenweise nach dem Schema „zweite mal dritte minus dritte mal zweite“ usw. berechnet. Die Probe mit dem Skalarprodukt zeigt, dass das Ergebnis auf beiden Vektoren senkrecht steht. Für parallele Vektoren ergibt sich der Nullvektor.

a) ; $\vec{n} \circ \vec{u} = -3 + 12 - 9 = 0$, $\vec{n} \circ \vec{v} = -12 + 30 - 18 = 0$.

b) ; $\vec{n} \circ \vec{u} = 6 + 0 - 6 = 0$, $\vec{n} \circ \vec{v} = 3 - 15 + 12 = 0$.

c) ; $\vec{n} \circ \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$, $\vec{n} \circ \vec{v} = 0 - 1 + 1 = 0$.

d) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$: Jede Komponente hat die Form $u_i u_j - u_j u_i = 0$. Parallele Vektoren spannen keine Ebene auf.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Die Normalenform entsteht aus Normalenvektor und Stützpunkt.

Multipliziert man das Skalarprodukt aus, erhält man die Koordinatenform mit $d = \vec{n} \circ \vec{p}$. Punktproben sind in Koordinatenform besonders einfach, parallele Ebenen haben denselben Normalenvektor.

a) .

b) $d = \vec{n} \circ \vec{p} = 8 - 1 - 6 = 1$: $E: \ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$.
c) $4 + 1 - 0 = 5 \neq 1$: $Q \notin E$.
d) Gleicher Normalenvektor, $d = 0$: $4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren liefert einen Normalenvektor. Den Wert d erhält man, indem man den Stützpunkt einsetzt. Ein weiterer Punkt der Ebene dient als Kontrolle, ob die Koordinatenform stimmt.

a) ; $d = \vec{n} \circ \vec{p} = 13$: $E_1: \ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 13$.

b) ; $d = 7$: $E_2: \ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7$.

c) $r = s = 1$: $(3|4|3)$; Einsetzen: $13 = 13$ ✓.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Aus der Koordinatenform liest man drei Punkte ab, zum Beispiel die Spurpunkte, und bildet daraus eine Parameterform. Alternativ setzt man zwei Koordinaten als Parameter und löst nach der dritten auf. Spannvektoren müssen zum Normalenvektor orthogonal sein.

a) $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|8|0)$, $S_3(0|0|2)$.
b) $\vec{x} = (4|0|0)^T + r \cdot (-4|8|0)^T + s \cdot (-4|0|2)^T$.
c) $x_2 = 8 - 2r - 4s$: $\vec{x} = (0|8|0)^T + r \cdot (1|-2|0)^T + s \cdot (0|-4|1)^T$.
d) $(2|1|4) \circ (1|-2|0) = 2 - 2 = 0$; $(2|1|4) \circ (0|-4|1) = -4 + 4 = 0$ ✓.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Spurpunkte erhält man, indem man jeweils zwei Koordinaten null setzt. Fehlt eine Variable in der Gleichung, gibt es keinen Schnitt mit der entsprechenden Achse; die Ebene ist dann parallel zu ihr. Ist $d = 0$, geht die Ebene durch den Ursprung.

a) $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|2)$; allgemeine Lage, Spurdreieck im ersten Oktanten.
b) $S_1(4|0|0)$, $S_3(0|0|2)$; kein Schnitt mit der x_2-Achse: Die Ebene ist parallel zur x_2-Achse.
c) Nur $S_2(0|3|0)$; parallel zur x_1x_3-Ebene im Abstand 3.
d) Alle drei Spurpunkte fallen in den Ursprung ($d = 0$); die Ebene enthält die x_3-Achse

und die Winkelhalbierende $x_1 = x_2$ der x_1x_2-Ebene.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Für die Punktprobe setzt man die Koordinaten in die linke Seite ein und vergleicht mit d. Ist ein Parameter gesucht, entsteht eine lineare Gleichung. Das Vorzeichen von $\vec{n} \circ \vec{x} - d$ entscheidet, auf welcher Seite der Ebene ein Punkt liegt.

a) A: $2 + 2 + 3 = 7$ ✓. B: $4 - 0 + 3 = 7$ ✓. C: $0 - 5 + 12 = 7$ ✓. Alle drei liegen in E.
b) $2a - 1 + 6 = 7 \Rightarrow a = 1$.
c) Ursprung: 0. Gesucht sind Punkte mit $2x_1 - x_2 + 3x_3$; von A, B, C keiner, da alle in E liegen. Zum Beispiel $D(1|1|1)$: 4.
d) $3x_3 = 7 \Rightarrow \left(0\,|0|\frac{7}{3}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Die vierte Ecke des Rechtecks erhält man durch Vektoraddition. Mit dem Kreuzprodukt der Kantenvektoren entsteht die Koordinatenform des Daches. Setzt man die Schachtoberkante ein, zeigt der Vergleich mit d, ob sie über dem Dach liegt; die Dachhöhe erhält man durch Auflösen nach x_3.

a) : $D(12|8|10)$.

b) , gekürzt ; mit A: $-x_2 + 2x_3 = 12$.

c) $-5 + 2 \cdot 9 = 13 > 12$: P liegt oberhalb, der Schacht ragt heraus.
d) $2x_3 = 12 + 5 \Rightarrow x_3 = 8{,}5$ m; der Schacht ragt $0{,}5$ m heraus.
e) .

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Zuerst wird mit Kantenvektoren und Skalarprodukt gezeigt, dass das Modul ein Rechteck ist. Der Normalenvektor ergibt die Ebenengleichung. Senkrechter Lichteinfall bedeutet, dass die Sonnenrichtung parallel zum Normalenvektor ist; daraus wird die nötige Neigung bestimmt.

a) , ; : Parallelogramm mit rechtem Winkel, also Rechteck.
b) $(2|0|0)^T \times (0|1|0{,}5)^T = (0|-1|2)^T$; Ebene: $-x_2 + 2x_3 = 0$.
c) $(0|-1|-2)$ ist kein Vielfaches von $(0|-1|2)$; die Strahlen treffen schräg auf.
d) Gesucht ist : $-a - 2b = 0$, also . Die Kante soll nach oben führen ($k > 0$) und die Länge $\sqrt{1{,}25} = k\sqrt{5}$ haben: $k = 0{,}5$. Dann $D(0|-1|0{,}5)$, $C(2|-1|0{,}5)$; der neue Normalenvektor

$(2|0|0)^T \times (0|-1|0{,}5)^T = (0|-1|-2)^T$ ist parallel zu $\vec{s}$. Das Modul muss also zur anderen Seite geneigt werden.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Seitenwand ist eine Ebene durch zwei Bodenecken und die Spitze. Die gegenüberliegende Wand folgt aus der Symmetrie des Zeltes. Für Punktproben und Höhenberechnungen setzt man in die Koordinatenform ein und löst nach der fehlenden Koordinate auf.

a) , gekürzt ; $ABS: \; -3x_2 + 2x_3 = 0$.

b) Spiegelung an $x_2 = 2$ ($x_2 \to 4 - x_2$): $-3(4 - x_2) + 2x_3 = 0$, also $3x_2 + 2x_3 = 12$.
c) $-3 + 3 = 0$: P liegt genau in der Wand ABS, also auf dem Rand des Zelts.
d) $-1{,}5 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0{,}75$ m.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Die vierte Ecke folgt aus der Rechteckeigenschaft, die Ebene aus dem Kreuzprodukt zweier Kanten. Die Höhe der Rampe erhält man durch Auflösen nach x_3. Steigung und Länge folgen aus dem Kantenvektor, und ein Höhenvergleich entscheidet über die Kiste.

a) : $D(3|4|1)$. , gekürzt : $-x_1 + 3x_3 = 0$.

b) $x_3 = \frac{x_1}{3} = 0{,}6$ m.

c) m; Steigung $\frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$.

d) Über $(2|2)$ ist die Rampe $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ m hoch; $0{,}6$: Die Kiste passt knapp darunter.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Aus drei Messpunkten wird die Ebene des Hangs bestimmt. Die Geländehöhe an einem anderen Punkt erhält man durch Einsetzen der ersten beiden Koordinaten. Der Vergleich mit der Terrassenhöhe zeigt, ob aufgeschüttet oder abgetragen werden muss.

a) , ; Kreuzprodukt , gekürzt :

$-x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 2100$.
b) $10x_3 = 2100 + 20 - 2 \cdot 15 = 2090 \Rightarrow x_3 = 209$ m.
c) Das Gelände liegt bei 209 m, also 2 m unter der Terrassenhöhe: Es muss 2 m aufgeschüttet werden.
d) Die Höhe ändert sich pro Meter in x_1-Richtung um $+0{,}1$ m und in x_2-Richtung um

$-0{,}2$ m. Am stärksten fällt der Hang in Richtung $(-1|2)$ (Gegenrichtung des Anstiegs $(0{,}1|-0{,}2)$).

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Eine Ebene ist durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb festgelegt. Als Spannvektoren dienen der Richtungsvektor der Geraden und der Verbindungsvektor zum Punkt. Für die zweite Gerade prüft man Richtung und einen Punkt mit der Koordinatenform.

a) Erste Zeile: $1 + r = 3 \Rightarrow r = 2$; zweite Zeile: $4 \neq 1$. $P \notin g$.

b) .

c) , gekürzt , $d = -1$: $-2x_1 + x_2 + x_3 = -1$.

d) h ist parallel zu g und geht durch $P \in E$. Probe: $\vec{n} \circ (1|2|0)^T = 0$, und P erfüllt die Gleichung. Also $h \subset E$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Zwei sich schneidende Geraden legen eine Ebene fest: Ihre Richtungsvektoren sind die Spannvektoren, der Schnittpunkt der Stützpunkt. Der Normalenvektor folgt aus dem Kreuzprodukt. Windschiefe Geraden liegen dagegen in keiner gemeinsamen Ebene.

a) g mit $r = 2$: $(3|1|2)$; h mit $s = 1$: $(3|1|2)$ ✓.
b) $E:\ \vec{x} = (3|1|2)^T + r \cdot (1|0|1)^T + s \cdot (0|1|1)^T$.

c) ; $d = -3 - 1 + 2 = -2$: $-x_1 - x_2 + x_3 = -2$, also

$x_1 + x_2 - x_3 = 2$.
d) Windschiefe Geraden liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene: Die Ebene durch g parallel zu h enthält h nicht.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Jede Dachfläche ist eine Ebene durch drei bekannte Punkte. Mit dem Kreuzprodukt und einem Punkt entsteht die Koordinatenform. Die Antennenhöhe ergibt sich durch Einsetzen; Flächeninhalte von Trapez und Dreieck folgen aus den Höhen, die man als Vektorbeträge berechnet.

a) Trapez: , gekürzt $(0|-3|4)^T$:

$-3x_2 + 4x_3 = 24$. Dreieck: , gekürzt $(3|0|4)^T$

; mit B: $3x_1 + 4x_3 = 60$.
b) $F_1(4|4|9)$: $-12 + 36 = 24$ ✓; $F_2(8|4|9)$ ebenso.
c) $-3 \cdot 2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow x_3 = 7{,}5$ m.
d) Höhe des Trapezes: $|(0|4|3)| = 5$ m. Fläche: $\frac{12+4}{2} \cdot 5 = 40\,\mathrm{m}^2$.
e) Dreieck BCF_2: Grundseite 8 m, Höhe $|(-4|0|3)| = 5$ m, Fläche $20\,\mathrm{m}^2$. Gesamt: $2 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 120\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Die Norm begrenzt das Verhältnis von Höhe zu horizontaler Länge. Daraus folgt die Mindestlänge. Die Ebene enthält die untere Kante und den oberen Randpunkt. Für die schräge Variante wird die horizontale Länge in Fahrtrichtung berechnet und die Steigung erneut geprüft.

a) $\frac{0{,}48}{\ell} \leq 0{,}06 \Rightarrow \ell \geq 8$ m.
b) Die Ebene enthält die x_2-Achse und den Punkt $(8|0|0{,}48)$: $0{,}06x_1 - x_3 = 0$, also $3x_1 - 50x_3 = 0$.
c) $x_3 = 0{,}06 \cdot 3 = 0{,}18$ m.
d) Fahrtrichtung $(6|2|0{,}48)^T$, horizontale Länge $\sqrt{40} \approx 6{,}32$ m; Steigung $\frac{0{,}48}{6{,}32} \approx 7{,}6\,\% > 6\,\%$: nicht zulässig.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Die vier Seitenflächen haben wegen der Symmetrie ähnliche Gleichungen; eine wird mit dem Kreuzprodukt berechnet, die anderen folgen durch Vorzeichenwechsel. Ein Punkt liegt innen, wenn er alle vier Ungleichungen erfüllt. Die Glasfläche ergibt sich aus vier Dreiecken.

a) ABS: , gekürzt $(0|-8|5)^T$; mit A:

$-8x_2 + 5x_3 = 40$. Entsprechend $BCS:\ 8x_1 + 5x_3 = 40$, $CDS:\ 8x_2 + 5x_3 = 40$, $DAS:\ -8x_1 + 5x_3 = 40$.
b) Ein Punkt liegt innen, wenn er alle vier Ungleichungen $\pm 8x_i + 5x_3 \leq 40$ erfüllt: $8 \cdot 2 + 20 = 36 \leq 40$, $8 \cdot 1 + 20 = 28 \leq 40$, die anderen sind kleiner. Ja, innerhalb.
c) Über $(2|-3)$ ist die Fläche ABS maßgeblich ($|x_2| > |x_1|$): $24 + 5x_3 = 40 \Rightarrow x_3 = 3{,}2$ m.
d) Höhe einer Seitenfläche $\sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} \approx 9{,}43$ m; Glasfläche $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{89} \approx 188{,}7\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Ein Punkt liegt in einer Ebene der Schar, wenn er ihre Gleichung erfüllt;

das liefert eine Gleichung für a. Parallelität zu einer Achse erkennt man am fehlenden Koeffizienten. Für die gemeinsame Gerade setzt man ihre Punkte allgemein ein.

a) $a + 2 + 3 = 2a \Rightarrow a = 5$.
b) Parallel zur x_1-Achse, wenn x_1 fehlt: $a = 0$, $E_0: \; x_2 + x_3 = 0$.
c) Einsetzen: $2a + t - t = 2a$ ✓ für alle t und alle a.
d) Dazu müsste $(a|1|1)$ ein Vielfaches von $(1|0|0)$ sein; die zweite Koordinate $1 \neq 0$ verhindert das. Nein.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Drei Fußpunkte legen stets eine Ebene fest. Man prüft, ob der vierte Punkt darin liegt, und berechnet, wie weit er in x_3-Richtung abweicht. Diese Abweichung ist die Länge, um die ein Bein gekürzt oder unterlegt werden muss.

a) Die Ebene durch A, B, C ist $x_3 = 0$; D erfüllt sie nicht ($0{,}6 \neq 0$).

b) , gekürzt $(0|-3|400)^T$:

$-3x_2 + 400x_3 = 0$. Über $(120|80)$: $x_3 = \frac{240}{400} = 0{,}6$ cm; C liegt $0{,}6$ cm darunter.
c) Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen immer eine Ebene; alle drei Füße berühren also stets den Boden.
d) Das Bein bei D steht auf einer um $0{,}6$ cm erhöhten Stelle: Man kürzt es um $0{,}6$ cm oder legt unter A, B und C je $0{,}6$ cm unter.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Man prüft, dass die drei Spurpunkte die Gleichung erfüllen. Für das Volumen nutzt man die Pyramidenformel mit rechtwinkliger Grundfläche. Bei der Optimierung hilft die Symmetrie der Bedingung: Sie legt nahe, dass alle Achsenabschnitte gleich groß sind.

a) Alle drei Spurpunkte erfüllen die Gleichung ($\frac{a}{a} = 1$ usw.), und die Gleichung ist linear, beschreibt also eine Ebene. Durch drei nicht kollineare Punkte gibt es genau eine Ebene.
b) Division durch 12: $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1$; $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|2)$.
c) Grundfläche ist das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und b: $G = \frac{ab}{2}$; Höhe c: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot c = \frac{abc}{6}$.
d) Die Bedingung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ und das Volumen $\frac{abc}{6}$ ändern sich nicht, wenn man a, b, c vertauscht; das Minimum liegt daher im symmetrischen Fall: $\frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = b = c = 3$, $V = \frac{27}{6} = 4{,}5$ VE. (Vergleich: $a = 2$, $b = c = 4$ gibt $V = \frac{32}{6} \approx 5{,}33$.)