Lösungen zur Klassenarbeit - Binomialverteilung und Erwartungswert

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Zuerst wird begründet, warum näherungsweise eine Bernoulli-Kette vorliegt: zwei Ausgänge, gleiche Trefferwahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit bei großer Produktion (eine BE). Dann werden die Wahrscheinlichkeit für keinen Fehler und über das Gegenereignis die für mindestens zwei Fehler berechnet (zwei BE). Der Erwartungswert folgt aus $\mu = np$ (eine BE).

a) Zwei Ausgänge (fehlerhaft/in Ordnung), bei großer Produktion gleiches $p = 0{,}04$ und Unabhängigkeit: $X \sim B(25; 0{,}04)$. (1 BE)
b) $P(X = 0) = 0{,}96^{25} \approx 0{,}3604$; $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}2642$. (2 BE)
c) $\mu = 25 \cdot 0{,}04 = 1$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Freiwürfe werden als Bernoulli-Kette mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$ modelliert. Die Einzelwahrscheinlichkeit wird mit der Formel von Bernoulli berechnet (eine BE). Für mindestens neun Treffer addiert man zwei Einzelwahrscheinlichkeiten (zwei BE). Erwartungswert und Standardabweichung ergeben sich aus den bekannten Formeln (eine BE). Kontrolle: Wegen $\mu = 8$ ist ein Wert von etwa $30\,\%$ für genau acht Treffer plausibel; ein häufiger Fehler ist, bei „mindestens neun“ nur $P(X = 9)$ zu berechnen.

a) $P(X = 8) = \binom{10}{8} 0{,}8^8\, 0{,}2^2 \approx 0{,}3020$. (1 BE)
b) $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0{,}2684 + 0{,}1074 = 0{,}3758$. (2 BE)
c) $\mu = 8$, $\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{1{,}6} \approx 1{,}26$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Bedingung „mindestens ein Gewinn mit mindestens $90\,\%$“ wird über das Gegenereignis als Ungleichung $0{,}8^n \leq 0{,}1$ geschrieben. Für das Logarithmieren und das korrekte Umdrehen des Ungleichheitszeichens gibt es drei Bewertungseinheiten. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinne bei dieser Anzahl folgt über das Gegenereignis (eine BE). Kontrolle: $0{,}8^{10} \approx 0{,}107$ ist noch größer als $0{,}1$, erst $0{,}8^{11} \approx 0{,}086$ reicht; wer das Ungleichheitszeichen nicht umdreht, erhält fälschlich $n \leq 10$.

a) $1 - 0{,}8^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}32$; also mindestens 11 Lose. (3 BE)
b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0{,}3221 = 0{,}6779$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Zahl der Sechsen bei drei Würfen ist binomialverteilt; die vier Wahrscheinlichkeiten werden in einer Tabelle angegeben (zwei BE). Aus den Auszahlungen minus Einsatz ergibt sich der Gewinn, dessen Erwartungswert als gewichtete Summe berechnet wird (zwei BE). Für den fairen Bonus setzt man den Erwartungswert gleich null (eine BE).

a) $X \sim B\left(3; \frac{1}{6}\right)$: $P(X=0)=\frac{125}{216}$, $P(X=1)=\frac{75}{216}$, $P(X=2)=\frac{15}{216}$, $P(X=3)=\frac{1}{216}$. (2 BE)

b) Gewinn: -2, 1, 4, *17\,€*.
E(G)=\frac{-250+75+60+17}{216}=\frac{-98}{216}\approx-0{,}45\,€. (2 BE)

c) Nicht fair. Mit Bonus B ist
E(G)=\frac{-250+75+60+(7+B)}{216}=\frac{B-108}{216}=0\Rightarrow B=108\,€. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Varianz $np(1-p)$ wird als quadratische Funktion von p betrachtet; ihr Scheitel liegt bei $p=0{,}5$, dort ist die Streuung maximal (zwei BE). Für die gesuchte Standardabweichung quadriert man und löst die quadratische Gleichung; beide Lösungen sind im Sachzusammenhang sinnvoll (eine BE).

a) $\sigma^2=100p(1-p)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel in p mit Scheitel bei $p=0{,}5$: $\sigma_{\max}=\sqrt{25}=5$. (2 BE)

b) $100p(1-p)=16 \Leftrightarrow p^2-p+0{,}16=0 \Leftrightarrow p=0{,}2$ oder $p=0{,}8$. (1 BE)