# Lernzettel - Binomialverteilung und Erwartungswert

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

**Einstieg: Zehn Elfmeter beim Vereinstraining**

Lena ist Torschützin in der B-Jugend ihres Fußballvereins. Ihre Trainerin hat notiert, dass sie etwa $70\,\%$ ihrer Elfmeter verwandelt. Beim Abschlusstraining schießt Lena zehn Elfmeter. Wie wahrscheinlich ist es, dass sie genau sieben trifft? Wie wahrscheinlich sind mindestens neun Treffer? Und wie viele Treffer sind „normal“?

Solche Fragen treten überall auf, wo ein Versuch mit nur zwei möglichen Ausgängen mehrfach unabhängig wiederholt wird: bei der Qualitätskontrolle in der Fabrik, bei Umfragen, beim Keimen von Samen oder bei der Pünktlichkeit von Zügen. Die Binomialverteilung liefert dafür ein einziges Modell mit nur zwei Parametern $n$ und $p$. In diesem Kapitel lernen Sie, das Modell zu begründen, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und mit dem Erwartungswert Prognosen und faire Spiele zu beurteilen.

## Bernoulli-Experimente und Bernoulli-Ketten

**Definition: Bernoulli-Experiment**

Ein **Bernoulli-Experiment** hat genau zwei Ausgänge: *Treffer* (mit der Wahrscheinlichkeit $p$) und *Niete* (mit $1-p$). Wiederholt man es $n$-mal unabhängig unter gleichen Bedingungen, spricht man von einer **Bernoulli-Kette der Länge** $n$. Beispiele: Würfeln auf „Sechs“ ($p=\frac{1}{6}$), Münzwurf ($p=\frac{1}{2}$), Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne, Prüfen von Bauteilen bei großer Produktion. Die Anzahl der Treffer $X$ heißt **binomialverteilt** mit den Parametern $n$ und $p$, kurz $X \sim B(n;p)$. Voraussetzungen: gleiche Trefferwahrscheinlichkeit in jedem Versuch und Unabhängigkeit. Ziehen ohne Zurücklegen aus einer kleinen Urne erfüllt diese Voraussetzung nicht.

**Definition: Binomialverteilung**

Eine Zufallsgröße $X$, die die Anzahl der Treffer in einer **Bernoulli-Kette** der Länge $n$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p$ zählt, heißt **binomialverteilt**; man schreibt $X \sim B(n;p)$.

## Die Formel von Bernoulli

Die Wahrscheinlichkeit für genau $k$ Treffer ist $P(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$. Dabei ist $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ die Anzahl der Pfade mit $k$ Treffern im Baumdiagramm, $p^k(1-p)^{n-k}$ ist die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Pfads. Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei

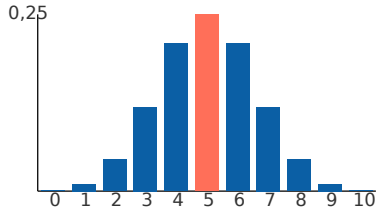
6 Würfen genau zweimal eine Sechs zu werfen?
$P(X=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=15\cdot\frac{625}{46656}\approx 0{,}2009.$

**Satz: Formel von Bernoulli**

Für $X\sim B(n;p)$ gilt $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ für $k=0,1,\ldots,n$.

## Kumulative Wahrscheinlichkeiten

Für „höchstens $k$“ addiert man: $P(X\le k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)$. Die Gegenereignisse liefern „mindestens $k$“: $P(X\ge k)=1-P(X\le k-1)$. Für „genau“, „höchstens“, „mindestens“, „weniger als“, „mehr als“ müssen Sie die Ungleichung korrekt übersetzen: „mehr als 3“ bedeutet $X\ge 4$, „weniger als 3“ bedeutet $X\le 2$. Im Abitur verwenden Sie Tabellen der kumulierten Binomialverteilung oder den Taschenrechner (binomcdf).




## Erwartungswert und Standardabweichung

Der Erwartungswert gibt an, wie viele Treffer man auf lange Sicht im Mittel erwartet: $\mu=E(X)=n\,p$. Die Streuung misst $\sigma=\sqrt{n\,p\,(1-p)}$. Beispiel $n=100$, $p=0{,}3$: $\mu=30$, $\sigma=\sqrt{21}\approx 4{,}58$. Je näher $p$ an $0{,}5$ liegt, desto größer ist die Streuung. Das Histogramm der Binomialverteilung hat sein Maximum bei $k\approx np$; für $p=0{,}5$ ist es symmetrisch, für $p$ rechtsschief (längerer Schwanz nach rechts).

**Satz: Erwartungswert und Standardabweichung**

Für $X\sim B(n;p)$ gilt $E(X)=n\,p$ und $\sigma=\sqrt{n\,p\,(1-p)}$.

## Mindestens ein Treffer und nötige Versuchszahl

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer ist $P(X\ge 1)=1-(1-p)^n$. Soll sie mindestens $0{,}95$ betragen, so gilt $1-(1-p)^n\ge 0{,}95\Leftrightarrow(1-p)^n\le 0{,}05\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln 0{,}05}{\ln(1-p)}$. Beachten Sie: Beim Dividieren durch $\ln(1-p)$ dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Beispiel $p=0{,}1$: $n\ge\frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9}\approx 28{,}4$, also mindestens 29 Versuche.

**Beispiel 1: Qualitätskontrolle**

Ein Hersteller weiß, dass $5\,\%$ seiner Schrauben fehlerhaft sind. Eine Stichprobe umfasst 20 Schrauben; $X$ bezeichne die Anzahl fehlerhafter Schrauben. Dann gilt

$X \sim B(20;0{,}05)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass *keine* Schraube fehlerhaft ist, beträgt $P(X=0) = 0{,}95^{20} \approx 0{,}3585$. Die Wahrscheinlichkeit für *mindestens eine* fehlerhafte Schraube ist das Gegenereignis: $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}3585 = 0{,}6415$. Der Erwartungswert ist $\mu = 20 \cdot 0{,}05 = 1$: Im Mittel ist eine Schraube pro Stichprobe fehlerhaft, auch wenn in mehr als einem Drittel der Stichproben keine Fehler vorkommen. Diese Interpretation – der Erwartungswert ist ein *Mittelwert auf lange Sicht*, nicht der wahrscheinlichste Wert – wird im Abitur gern abgefragt.

## Arbeit mit Taschenrechner und Tabelle

Die meisten Taschenrechner bieten die Funktionen *binompdf* (für $P(X=k)$) und *binomcdf* (für $P(X \leq k)$). Notieren Sie im Abitur trotzdem den Ansatz mit den Parametern $n$ und $p$, zum Beispiel „$P(X \leq 4) = 0{,}3770$ (binomcdf, $n=10$, $p=0{,}5$)“ – Punkte gibt es für Ansatz und Ergebnis. Bei Tabellen der kumulierten Binomialverteilung liest man $P(X \leq k)$ direkt ab; für $P(a \leq X \leq b)$ rechnet man $P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$. Achten Sie auf die Verschiebung um 1 bei der unteren Grenze, denn hier passieren die meisten Fehler.

## Ablauf einer Abituraufgabe

**So gehst du vor**

1. Zufallsgröße $X$ benennen und beschreiben („$X$ ist die Anzahl der …“), $n$ und $p$ angeben, Verteilung nennen: $X \sim B(n;p)$.
2. Ereignis als Ungleichung für $X$ formulieren.
3. Mit Formel, Tabelle oder Taschenrechner berechnen, Ergebnis mit vier Nachkommastellen oder als Prozentwert angeben.
4. Im Antwortsatz auf die Frage zurückkommen.

## Weitere Beispiele

**Beispiel 2: Einzelwahrscheinlichkeit**

**Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt genau zweimal eine Sechs?**

$X \sim B(10;\tfrac{1}{6})$. $P(X=2) = \binom{10}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{5}{6}\right)^8 = 45 \cdot \tfrac{5^8}{6^{10}} \approx 0{,}291$.

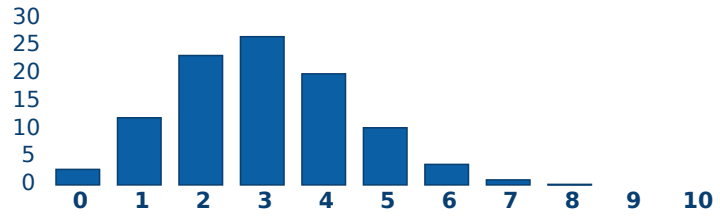
**Beispiel 3: Erwartungswert**

**Berechnen Sie $E(X)$ und $\sigma$ für $X \sim B(100;0{,}2)$.**

$E(X) = 100 \cdot 0{,}2 = 20$; $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{16} = 4$.

## Histogramme lesen und vergleichen

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße stellt man als Histogramm dar: Über jedem $k$ steht ein Balken der Höhe $P(X=k)$. Das Histogramm zeigt auf einen Blick, wo die Wahrscheinlichkeit „sitzt“. Der höchste Balken liegt in der Nähe des Erwartungswerts $\mu = np$; je größer $\sigma$, desto breiter und flacher ist das Histogramm. Für $p$ läuft es nach rechts flach aus, für $p > 0{,}5$ nach links. Kumulierte Wahrscheinlichkeiten wie $P(X \le 3)$ entsprechen der Summe der Balken von $0$ bis $3$.




### Beispiel 4: Histogramm auswerten

**Das Histogramm zeigt $B(10;0{,}3)$. Lesen Sie den wahrscheinlichsten Wert ab und berechnen Sie $P(2 \le X \le 4)$.**

Der höchste Balken steht bei $k = 3$, passend zu $\mu = 10 \cdot 0{,}3 = 3$. Mit der Formel von Bernoulli erhält man $P(X=2) \approx 0{,}2335$, $P(X=3) \approx 0{,}2668$ und $P(X=4) \approx 0{,}2001$. Addiert ergibt sich $P(2 \le X \le 4) \approx 0{,}7004$. Mit dem Taschenrechner rechnet man kürzer: $P(X \le 4) - P(X \le 1)$.

## Erwartungswert beliebiger Zufallsgrößen und faire Spiele

Der Erwartungswert ist nicht auf die Binomialverteilung beschränkt. Nimmt eine Zufallsgröße $X$ die Werte $x_1, \dots, x_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_i)$ an, so ist $E(X) = x_1 P(X=x_1) + \dots + x_m P(X=x_m)$. Bei Glücksspielen ist $X$ meist der Gewinn des Spielers, also Auszahlung minus Einsatz. Ist $E(X) = 0$, heißt das Spiel **fair**; bei $E(X)$ verdient auf lange Sicht der Veranstalter.

### Beispiel 5: Glücksrad beim Schulfest

**Ein Glücksrad hat $10$ gleich große Felder: ein Feld „*10\,€*“, zwei Felder „*2\,€*“, der Rest ist leer. Ein Dreh kostet *1{,}50\,€*. Ist das Spiel fair?**

Gewinn $X$ des Spielers: *8{,}50\,€* mit $0{,}1$, *0{,}50\,€* mit $0{,}2$ und *-1{,}50\,€* mit $0{,}7$. Also *E(X)=0{,}85+0{,}10-1{,}05=-0{,}10\,€*. Pro Dreh verliert der Spieler im Mittel $10$ Cent; das Spiel ist nicht fair, die Klassenkasse gewinnt bei $200$ Drehungen etwa *20\,€*. Fair wäre ein Einsatz von *1{,}40\,€*.

## Unbekannte Parameter bestimmen

Im Abitur wird häufig umgekehrt gefragt: Wie groß muss $n$ mindestens sein, oder welches $p$ passt zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit? Für „mindestens ein Treffer“ löst man

$1-(1-p)^n \geq c$ mit dem Logarithmus. Ist $P(X=0)$ gegeben, folgt $p$ aus $(1-p)^n = P(X=0)$ durch Wurzelziehen. Bei komplizierteren Bedingungen wie $P(X \geq 3) \geq 0{,}9$ probiert man systematisch mit einer Wertetabelle des Taschenrechners. Notieren Sie dabei immer die beiden entscheidenden Werte, also den letzten, der die Bedingung noch nicht erfüllt, und den ersten, der sie erfüllt. So bleibt der Lösungsweg nachvollziehbar, und im Abitur gibt es die volle Punktzahl auch für den Ansatz.

**Beispiel 6: Wie viele Lose?**

**Bei einer Tombola gewinnt jedes fünfte Los. Wie viele Lose muss man kaufen, um mit mindestens $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit wenigstens einen Gewinn zu haben?**

Ansatz: $1-0{,}8^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}8} \approx 13{,}43$. Man braucht also mindestens $14$ Lose. Probe: $0{,}8^{13} \approx 0{,}0550$ ist noch zu groß, $0{,}8^{14} \approx 0{,}0440$ reicht.

**Wusstest du? Jakob Bernoulli und das Gesetz der großen Zahlen**

Der Basler Mathematiker Jakob Bernoulli arbeitete zwanzig Jahre an seinem Buch „Ars Conjectandi“ (Kunst des Vermutens), das erst 1713, acht Jahre nach seinem Tod, erschien. Darin bewies er, dass sich die relative Häufigkeit der Treffer bei vielen Wiederholungen mit großer Wahrscheinlichkeit beliebig nahe an $p$ annähert. Dieses Gesetz der großen Zahlen ist die Grundlage für Versicherungen, Wahlumfragen und jede Qualitätskontrolle.

## Typische Formulierungen richtig übersetzen

Viele Fehler in Abituraufgaben entstehen nicht beim Rechnen, sondern beim Übersetzen des Textes. „Höchstens fünf“ bedeutet $X \leq 5$, „weniger als fünf“ dagegen $X \leq 4$. „Mindestens fünf“ ist $X \geq 5$ und wird über das Gegenereignis $1-P(X \leq 4)$ berechnet, „mehr als fünf“ ist $X \geq 6$. Bei „zwischen drei und sieben“ muss geklärt werden, ob die Grenzen dazugehören; ohne weiteren Hinweis zählt man sie im Abitur mit. Schreiben Sie deshalb immer zuerst die Ungleichung für $X$ auf und erst danach den Ansatz mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten. So bleibt der Lösungsweg nachvollziehbar, und auch bei einem Tippfehler im Taschenrechner gibt es Punkte für den richtigen Ansatz.

**Merke: Das Wichtigste auf einen Blick**

- Bernoulli-Kette der Länge $n$: $n$ unabhängige Versuche mit je zwei Ausgängen (Treffer/Niete) und gleicher Trefferwahrscheinlichkeit $p$; $X$ = Anzahl der Treffer, $X \sim B(n;p)$.
- Formel von Bernoulli: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; $\binom{n}{k}$ zählt die Pfade, $p^k(1-p)^{n-k}$ ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades.
- Kumuliert: $P(X \leq k)$ aus Tabelle oder Taschenrechner; „mindestens $k$“: $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$; „zwischen“: $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$.
- Erwartungswert $\mu = n\,p$, Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$; $\mu$ ist ein

Mittelwert auf lange Sicht, nicht unbedingt der wahrscheinlichste Wert.
- Allgemeiner Erwartungswert: $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$; ein Spiel ist fair, wenn der erwartete Gewinn des Spielers *0\,€* beträgt.
- „Mindestens ein Treffer“: $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$; die nötige Versuchszahl erhält man mit dem Logarithmus (Ungleichheitszeichen dreht sich beim Teilen durch $\ln(1-p)$).
- Das Histogramm von $B(n;p)$ hat sein Maximum bei $k \approx np$; es ist für $p = 0{,}5$ symmetrisch, für $p$ rechtsschief.
- Antwortsätze im Abitur: Zufallsgröße benennen, Parameter $n$ und $p$ angeben, Ereignis als Ungleichung formulieren, Ergebnis auf vier Nachkommastellen.

## Achtung: Typische Fehler

- Binomialverteilung ohne Prüfung der Voraussetzungen verwenden (Ziehen ohne Zurücklegen, abhängige Versuche).
- „Mindestens“ und „höchstens“ verwechseln oder die Grenze um 1 falsch setzen.
- Den Binomialkoeffizienten vergessen und nur $p^k(1-p)^{n-k}$ rechnen.
- Beim Lösen von $(1-p)^n \leq c$ das Ungleichheitszeichen nicht umdrehen.
- $\mu$ mit einer Wahrscheinlichkeit verwechseln: $\mu$ ist ein Mittelwert der Trefferzahl.

**Ottos Tipp:** Schreibe immer zuerst „$X$ = Anzahl der …“ auf und gib $n$ und $p$ an. Dann ist der halbe Weg schon geschafft und du bekommst die Punkte für den Ansatz!

## Ottos Tipp

Prüfen Sie vor jeder Rechnung die vier Bedingungen: zwei Ausgänge, feste Trefferwahrscheinlichkeit, unabhängige Versuche, feste Länge $n$. Bei „mindestens“ lohnt fast immer das Gegenereignis.