Arbeitsblatt - Binomialverteilung und Erwartungswert

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Bernoulli-Kette oder nicht?

Entscheiden Sie jeweils, ob eine Bernoulli-Kette vorliegt. Geben Sie gegebenenfalls n, p und die Bedeutung von X an.

a) Ein Würfel wird 12-mal geworfen; gezählt werden die Sechsen.
b) Aus einer Urne mit 3 roten und 2 blauen Kugeln werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; gezählt werden die roten.
c) Eine Münze wird 20-mal geworfen; gezählt wird „Zahl“.
d) Aus einer Lieferung von $50\,000$ Glühlampen mit $2\,\%$ Ausschuss werden 100 Lampen geprüft.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Die Formel von Bernoulli

Es sei $X \sim B(8;0{,}25)$. Rechnen Sie mit der Formel von Bernoulli und geben Sie vier Nachkommastellen an.

a) $P(X = 2)$
b) $P(X = 0)$ und $P(X = 8)$
c) $P(X \leq 1)$
d) Welches Ereignis ist wahrscheinlicher: „genau zwei Treffer“ oder „höchstens ein Treffer“?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten arbeiten

Es sei $X \sim B(20;0{,}3)$. Verwenden Sie den Taschenrechner (binomcdf) und schreiben Sie jeweils den Ansatz auf.

a) $P(X \leq 5)$
b) $P(X \geq 8)$
c) $P(4 \leq X \leq 7)$
d) $P(X > 6)$ und $P(X$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Erwartungswert und Streuung

Berechnen Sie jeweils Erwartungswert μ und Standardabweichung σ und deuten Sie μ im Sachzusammenhang.

a) Ein Würfel wird 300-mal geworfen, X = Anzahl der Sechsen.
b) $X \sim B(50; 0{,}9)$: Anzahl gekeimter Samen in einer Packung mit 50 Samen.
c) $X \sim B(400; 0{,}5)$: Anzahl „Kopf“ bei 400 Münzwürfen.
d) Für welches p ist σ bei $n = 100$ am größten? Begründen Sie.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Sechsen beim Würfeln

Ein fairer Würfel wird 12-mal geworfen. X zählt die Sechsen.

a) Geben Sie die Verteilung von X an.
b) Berechnen Sie $P(X = 2)$.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Sechs.
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mehr als drei Sechsen.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Raten beim Multiple-Choice-Test

Ein Test besteht aus 10 Fragen mit je vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Tim hat nicht gelernt und kreuzt bei jeder Frage zufällig an. Bestanden hat, wer mindestens 5 Fragen richtig beantwortet.

a) Begründen Sie, dass X = Anzahl richtiger Antworten binomialverteilt ist.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet Tim keine Frage richtig?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er?
d) Wie viele richtige Antworten erwartet man im Mittel?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Freiwürfe im Basketball

Jonas spielt in der Basketball-Jugendmannschaft und verwandelt Freiwürfe erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}75$. In einem Spiel wirft er 12 Freiwürfe. Die Würfe werden als unabhängig angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 9 Freiwürfe verwandelt.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 10 Treffer.
c) Mit wie vielen Treffern ist im Mittel zu rechnen?
d) Beurteilen Sie die Annahme der Unabhängigkeit.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Überbuchung beim Ferienflug

Ein Ferienflieger von Düsseldorf nach Mallorca hat 145 Sitzplätze. Erfahrungsgemäß erscheinen $5\,\%$ der Gebuchten nicht zum Abflug. Die Fluggesellschaft verkauft 150 Tickets. X sei die Anzahl der erscheinenden Fluggäste.

a) Geben Sie die Verteilung von X an und berechnen Sie μ.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle erscheinenden Fluggäste einen Platz bekommen.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Fluggast abgewiesen werden muss.
d) Nennen Sie einen Grund, warum die Fluggesellschaft trotzdem überbucht.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Keimfähigkeit von Radieschensamen

Auf einer Samentüte steht: „Keimfähigkeit $90\,\%$“. Frau Schmidt sät im Schulgarten 50 Samen.

a) Wie viele Samen keimen im Mittel? Berechnen Sie auch σ.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 45 Samen keimen.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 42 Samen keimen.
d) Wie wahrscheinlich ist eine Keimzahl im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Losbude beim Sommerfest

Der Förderverein verkauft beim Sommerfest 500 Lose zu je *2\,€*. Es gibt 5 Hauptgewinne im Wert von *30\,€*, 45 Gewinne im Wert von *5\,€* und 100 Trostpreise im Wert von *1\,€*; der Rest sind Nieten.

Gewinn (Wert)	*30\,€*	*5\,€*	*1\,€*	Niete
Anzahl	5	45	100	350

a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Reingewinns G eines Loskäufers auf (Wert minus Einsatz).
b) Berechnen Sie $E(G)$ und deuten Sie das Ergebnis.
c) Wie viel Geld bleibt dem Förderverein, wenn alle Lose verkauft werden und er die Preise selbst bezahlt?
d) Wie teuer müsste ein Los sein, damit das Spiel fair ist?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Sammelfiguren im Überraschungsei

In jedem siebten Schokoladenei steckt laut Hersteller eine Sonderfigur. Mia möchte unbedingt eine Sonderfigur haben.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet sie in 5 Eiern mindestens eine Sonderfigur?
b) Wie viele Eier muss sie mindestens kaufen, um mit mindestens $90\,\%$ Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Sonderfigur zu finden?

c) Ein Ei kostet $0{,}79\,€$. Was kostet diese Sicherheit?
d) Mias Bruder behauptet: „Nach 7 Eiern hat man sicher eine.“ Nehmen Sie Stellung.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Akkus in der Qualitätskontrolle

Ein Zulieferer in Baden-Württemberg fertigt Akkus für E-Bikes. $2\,\%$ der Akkus sind fehlerhaft. Für eine Stichprobe werden 100 Akkus zufällig entnommen.

a) Berechnen Sie μ und σ der Anzahl fehlerhafter Akkus.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Akkus fehlerhaft sind.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mehr als 4 fehlerhafte Akkus.
d) In einer Stichprobe findet man 7 fehlerhafte Akkus. Was folgt daraus?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Seltene Blutgruppe

In Deutschland haben etwa $6\,\%$ der Bevölkerung die Blutgruppe 0 Rhesus negativ, die als Universalspenderblut gilt. Beim Blutspendetermin im Gemeindezentrum erscheinen 40 Personen, die als zufällige Stichprobe gelten.

a) Wie viele Spender mit 0 negativ sind zu erwarten?
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner diese Blutgruppe hat.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3 Spender mit 0 negativ.
d) Wie viele Spender müssten mindestens kommen, damit mit $99\,\%$ Wahrscheinlichkeit mindestens einer 0 negativ hat?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Pünktlichkeit im Fernverkehr

Im Fernverkehr erreichen etwa $65\,\%$ der Züge ihr Ziel pünktlich. Eine Pendlerin fährt in einem Monat 20-mal mit dem ICE von Hannover nach Berlin. Die Fahrten werden als unabhängig angenommen.

a) Wie viele pünktliche Fahrten sind zu erwarten?
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Fahrten pünktlich sind.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens die Hälfte pünktlich ist.
d) Die Pendlerin hatte 9 verspätete Fahrten. Ist das außergewöhnlich? Begründen Sie mit μ und σ.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Ein faires Glücksrad entwerfen

Die Klasse 12b plant für den Tag der offenen Tür ein Glücksrad mit 12 gleich großen Feldern. Vorgesehen sind folgende Auszahlungen; der Einsatz pro Dreh soll $1\,€$ betragen.

Feld	Auszahlung	Anzahl Felder
Jackpot	*6\,€*	1
Doppelt	*2\,€*	2
Einsatz zurück	*1\,€*	a
Niete	*0\,€*	$9 - a$

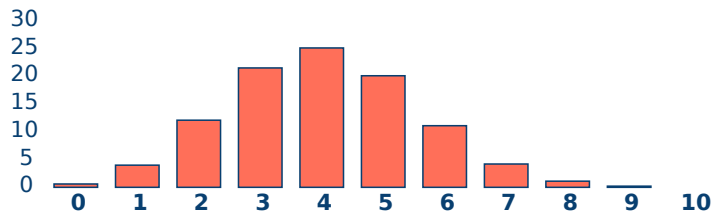
Die Klasse möchte mit dem Glücksrad Geld für die Abschlussfahrt einnehmen, die Besucher sollen aber nicht abgeschreckt werden.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns eines Spielers für $a = 2$.
b) Bestimmen Sie a so, dass das Spiel fair ist. Ist das möglich?
c) Die Klasse wählt $a = 1$. Wie viel Geld nimmt sie bei 600 Drehungen voraussichtlich ein?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt ein Besucher bei 5 Drehungen mindestens einmal den Jackpot?
e) Beurteilen Sie: Ist ein Glücksrad mit großem Jackpot und vielen Nieten für eine Klasse sinnvoll?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Ein Histogramm untersuchen

Das Histogramm gehört zu einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 10$.



Die Balkenhöhen sind in Prozent angegeben. Zur Auswahl stehen $p = 0{,}3$, $p = 0{,}4$ und $p = 0{,}6$.

a) Welches p passt zum Histogramm? Begründen Sie mit dem Erwartungswert und der Form.
b) Berechnen Sie $P(X = 4)$ und vergleichen Sie mit dem höchsten Balken.
c) Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.
d) Wie sähe das Histogramm für $p = 0{,}6$ aus?
e) Berechnen Sie σ und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X höchstens eine Standardabweichung von μ abweicht.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Parameter gesucht

In den folgenden Situationen ist jeweils ein Parameter der Binomialverteilung unbekannt. Stellen Sie einen Ansatz auf und lösen Sie ihn.

a) Bei $n = 10$ Versuchen ist $P(X = 0) = 0{,}2$. Bestimmen Sie p.
b) Für $X \sim B(n; 0{,}3)$ gilt $\mu = 24$. Bestimmen Sie n und σ.
c) Für $X \sim B(n; p)$ gilt $\mu = 12$ und $\sigma = 3$. Bestimmen Sie n und p.
d) Wie viele Versuche braucht man bei $p = 0{,}05$, damit $P(X \geq 1) > 0{,}5$ gilt?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Annahmeprüfung im Baumarkt

Ein Baumarkt erhält Lieferungen von LED-Leuchtmitteln. Der Einkäufer prüft aus jeder Lieferung 20 zufällig ausgewählte Leuchtmittel. Er nimmt die Lieferung an, wenn höchstens eines defekt ist; sonst geht sie zurück. Der Anteil defekter Leuchtmittel in einer Lieferung sei p.

Anteil defekt p	$0{,}02$	$0{,}05$	$0{,}10$	$0{,}20$
Annahmewahrscheinlichkeit	?	?	?	?

a) Begründen Sie: Die Annahmewahrscheinlichkeit ist $L(p) = (1-p)^{20} + 20p(1-p)^{19}$.
b) Füllen Sie die Tabelle aus.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine gute Lieferung ($p = 0{,}05$) fälschlich zurückgeschickt?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine schlechte Lieferung ($p = 0{,}2$) angenommen?
e) Der Lieferant findet die Regel zu streng. Wie wirkt sich die Regel „höchstens zwei defekt“ aus? Rechnen Sie für $p = 0{,}05$ und $p = 0{,}2$.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Der Schulbus kommt zu spät

Der Schulbus der Linie 7 in einer Kleinstadt in Hessen kommt an jedem Schultag unabhängig von den anderen Tagen mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}1$ zu spät. Eine Schulwoche hat 5 Schultage, ein Schulhalbjahr 20 Wochen. Eine Woche heißt „schlecht“, wenn der Bus an mindestens zwei Tagen zu spät kommt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus in einer Woche nie zu spät kommt.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine „schlechte“ Woche.
c) Wie viele schlechte Wochen sind im Halbjahr zu erwarten?
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es im Halbjahr höchstens eine schlechte Woche gibt.
e) Erklären Sie, warum hier zwei verschiedene Binomialverteilungen nacheinander verwendet werden.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Wo liegt der höchste Balken? (Knobelaufgabe)

Für $X \sim B(n; p)$ betrachtet man den Quotienten aufeinanderfolgender

Wahrscheinlichkeiten $Q(k) = \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$.

a) Zeigen Sie: $Q(k) = \frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}$.
b) Zeigen Sie: $P(X = k+1) > P(X = k)$ gilt genau dann, wenn k.
c) Bestimmen Sie damit den wahrscheinlichsten Wert für $n = 20$, $p = 0{,}3$ und prüfen Sie mit dem Taschenrechner.
d) Für welche p gibt es bei $n = 9$ zwei gleich hohe höchste Balken?