Lösungen - Binomialverteilung und Erwartungswert

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Für jede Situation werden die drei Bedingungen einer Bernoulli-Kette geprüft: genau zwei Ausgänge, gleichbleibende Trefferwahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit der Versuche. Ist eine Bedingung verletzt, darf man die Binomialverteilung nicht verwenden; bei sehr großen Grundgesamtheiten ist sie aber eine gute Näherung.

a) Ja: $n = 12$, $p = \frac{1}{6}$; X = Anzahl der Sechsen. Die Würfe sind unabhängig, und die Wahrscheinlichkeit bleibt gleich.
b) Nein: Ohne Zurücklegen ändert sich die Trefferwahrscheinlichkeit von Zug zu Zug ($\frac{3}{5}$, danach $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{4}$); die Versuche sind abhängig.
c) Ja: $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$; X = Anzahl der Würfe mit „Zahl“.
d) Näherungsweise ja: Bei $50\,000$ Lampen ändert das Entnehmen von 100 Stück die Ausschussquote praktisch nicht. $n = 100$, $p = 0{,}02$, X = Anzahl defekter Lampen.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Man setzt $n = 8$, $p = 0{,}25$ und das jeweilige k in die Formel von Bernoulli ein. Der Binomialkoeffizient zählt die Pfade mit k Treffern, das Produkt der Potenzen ist die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Pfades. Bei „höchstens“ werden die Einzelwahrscheinlichkeiten addiert.

a) $P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^6 = 28 \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}1780 \approx 0{,}3115$.
b) $P(X = 0) = 0{,}75^8 \approx 0{,}1001$; $P(X = 8) = 0{,}25^8 \approx 0{,}000015$ (fast unmöglich).
c) $P(X = 1) = 8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^7 \approx 0{,}2670$; also
$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0{,}3671$.
d) „Höchstens ein Treffer“ ist mit $0{,}3671$ etwas wahrscheinlicher als „genau zwei Treffer“ mit $0{,}3115$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Jedes Ereignis wird zuerst als Ungleichung für X übersetzt und dann auf die Form $P(X \le k)$ zurückgeführt, die der Taschenrechner direkt liefert. „Mindestens“ führt über das Gegenereignis, „zwischen“ über die Differenz zweier kumulierter Werte; dabei verschiebt sich die untere Grenze um eins.

a) $P(X \le 5) \approx 0{,}4164$ (direkt abgelesen).
b) $P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 7) \approx 1 - 0{,}7723 = 0{,}2277$.
c) $P(4 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 3) \approx 0{,}7723 - 0{,}1071 = 0{,}6652$.
d) $P(X > 6) = P(X \ge 7) = 1 - P(X \le 6) \approx 0{,}3920$; $P(X$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Erwartungswert und Standardabweichung folgen direkt aus den Formeln $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Wichtig ist die Deutung: μ ist ein Mittelwert auf lange Sicht. In d) betrachtet man σ^2 als quadratische Funktion von p und sucht ihren Scheitel.

a) $\mu = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50$; $\sigma = \sqrt{300 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 6{,}45$. Auf lange Sicht erwartet man pro 300 Würfe etwa 50 Sechsen.
b) $\mu = 50 \cdot 0{,}9 = 45$; $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}12$. Im Mittel keimen 45 Samen pro Packung.
c) $\mu = 200$; $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{100} = 10$. Man erwartet 200 Mal „Kopf“, typische Abweichungen liegen bei etwa 10.
d) $\sigma^2 = 100\,p(1-p) = 100(p - p^2)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel in p mit Scheitel bei $p = 0{,}5$; dort ist $\sigma = 5$ maximal.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Die zwölf Würfe sind unabhängig, die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs bleibt $\frac{1}{6}$. Damit ist X binomialverteilt. Für „mindestens eine Sechs“ ist das Gegenereignis „keine Sechs“ am bequemsten, für „mehr als drei“ das Gegenereignis „höchstens drei“.

a) $X \sim B\left(12; \frac{1}{6}\right)$, denn die Würfe sind unabhängig und $p = \frac{1}{6}$ bleibt gleich.
b) $P(X = 2) = \binom{12}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 66 \cdot \frac{1}{36} \cdot 0{,}1615 \approx 0{,}2961$.
c) $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 1 - 0{,}1122 = 0{,}8878$.
d) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0{,}8748 = 0{,}1252$.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Beim Raten ist jede Frage ein Bernoulli-Versuch mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Gesucht sind eine Einzelwahrscheinlichkeit, eine kumulierte Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis und der Erwartungswert. Das Ergebnis zeigt, warum Raten bei Multiple-Choice-Tests fast nie zum Bestehen reicht.

a) Jede Frage ist ein Bernoulli-Versuch (richtig/falsch) mit $p = 0{,}25$; die Fragen werden unabhängig geraten. Also $X \sim B(10; 0{,}25)$.
b) $P(X = 0) = 0{,}75^{10} \approx 0{,}0563$.
c) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}9219 = 0{,}0781$, also nur etwa $7{,}8\,\%$.
d) $\mu = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ richtige Antworten.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Die zwölf Freiwürfe werden als Bernoulli-Kette mit $p = 0{,}75$ modelliert. Man berechnet eine Einzelwahrscheinlichkeit mit der Formel, eine kumulierte Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis und den Erwartungswert. Am Ende wird die

Modellannahme der Unabhängigkeit kritisch beurteilt.

a) $X \sim B(12;0{,}75)$: $P(X=9)=\binom{12}{9}\,0{,}75^{9}\,0{,}25^{3}=220\cdot 0{,}0751\cdot 0{,}015625\approx 0{,}2581$.
b) $P(X\geq 10)=1-P(X\leq 9)\approx 1-0{,}6093=0{,}3907$.
c) $\mu=12\cdot 0{,}75=9$ Treffer.
d) Die Annahme ist eine Vereinfachung: Nervosität, Müdigkeit oder ein Erfolgserlebnis können die Trefferwahrscheinlichkeit von Wurf zu Wurf verändern.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: X zählt die erscheinenden Fluggäste, Treffer ist also „Fluggast kommt“ mit $p=0{,}95$. Alle bekommen einen Platz, solange höchstens 145 Personen erscheinen. Die Gegenwahrscheinlichkeit liefert das Risiko der Überbuchung, das die Fluggesellschaft gegen leere Plätze abwägt.

a) $X\sim B(150;0{,}95)$, $\mu=150\cdot 0{,}95=142{,}5$.
b) Alle bekommen einen Platz, wenn $X\leq 145$: $P(X\leq 145)\approx 0{,}8744$.
c) $P(X\geq 146)=1-P(X\leq 145)\approx 0{,}1256$, also etwa $12{,}6\,\%$.
d) Leere Plätze bringen kein Geld. Im Mittel bleiben ohne Überbuchung bei 145 Tickets etwa 7 Plätze leer; die gelegentlichen Entschädigungen sind billiger.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Jeder Samen keimt unabhängig mit $p=0{,}9$. Nach μ und σ werden kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnet. Für das σ-Intervall bestimmt man zuerst die ganzen Zahlen, die im Intervall liegen, und bildet dann die Differenz zweier kumulierter Werte.

a) $X\sim B(50;0{,}9)$: $\mu=45$, $\sigma=\sqrt{4{,}5}\approx 2{,}12$.
b) $P(X\geq 45)=1-P(X\leq 44)\approx 1-0{,}3839=0{,}6161$.
c) $P(X\leq 42)\approx 0{,}1221$.
d) $[45-2{,}12;45+2{,}12]$ enthält die ganzen Zahlen 43 bis 47:
$P(43\leq X\leq 47)=P(X\leq 47)-P(X\leq 42)\approx 0{,}8883-0{,}1221=0{,}7661$.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Zuerst wird die Zufallsgröße „Reingewinn“ festgelegt: Wert des Gewinns minus Einsatz. Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den Anzahlen geteilt durch 500. Der Erwartungswert ist die Summe der Produkte aus Gewinn und Wahrscheinlichkeit; beim fairen Lospreis ist er null.

a) *G=28\,€* mit $0{,}01$; *G=3\,€* mit $0{,}09$; *G=-1\,€* mit $0{,}2$; *G=-2\,€* mit $0{,}7$.
b) *E(G)=28\cdot0{,}01+3\cdot0{,}09-1\cdot0{,}2-2\cdot0{,}7=0{,}28+0{,}27-0{,}2-1{,}4=-1{,}05\,€*. Pro Los verliert ein Käufer im Mittel *1{,}05\,€*.
c) Einnahmen *1\,000\,€*, Preise *5\cdot30+45\cdot5+100\cdot1=150+225+100=475\,€*; es bleiben *525\,€* (*=500\cdot1{,}05\,€*).
d) Der mittlere Wert eines Loses ist *\frac{475}{500}=0{,}95\,€*; bei einem Lospreis von *0{,}95\,€* wäre das Spiel fair.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: „Mindestens eine Sonderfigur“ berechnet man über das Gegenereignis „keine Sonderfigur“. Für die nötige Anzahl Eier wird die Ungleichung $\left(\frac{6}{7}\right)^n \leq 0{,}1$ mit dem Logarithmus gelöst; beim Teilen durch den negativen Logarithmus dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

a) $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^5 \approx 1 - 0{,}4627 = 0{,}5373$.

b) $1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{6}{7}} \approx 14{,}94$. Sie braucht mindestens 15 Eier.

c) *15\cdot0{,}79\,€=11{,}85\,€*.

d) Falsch: $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^7 \approx 0{,}6601$. Mit etwa $34\,\%$ Wahrscheinlichkeit ist in 7 Eiern keine Sonderfigur.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die Stichprobe ist klein im Verhältnis zur Produktion, daher ist $X \sim B(100; 0{,}02)$ ein gutes Modell. Neben μ und σ werden kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnet. Ein sehr unwahrscheinliches Stichprobenergebnis ist ein Hinweis, dass die Annahme $p = 0{,}02$ nicht mehr stimmt.

a) $X \sim B(100; 0{,}02)$: $\mu = 2$, $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$.
b) $P(X \leq 2) \approx 0{,}6767$.
c) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}9492 = 0{,}0508$.
d) $P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 0{,}0041$ ist sehr klein. Man zweifelt daran, dass der Ausschussanteil noch $2\,\%$ beträgt, und lässt die Maschine prüfen.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Die Spender bilden eine Bernoulli-Kette mit Treffer „Blutgruppe 0 negativ“. Für „keiner“ und „mindestens drei“ werden Einzel- und kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnet. Die Mindestanzahl der Spender folgt wie bei allen „mindestens ein Treffer“-Aufgaben aus einer Logarithmus-Ungleichung.

a) $\mu = 40 \cdot 0{,}06 = 2{,}4$ Spender.
b) $P(X = 0) = 0{,}94^{40} \approx 0{,}0842$.
c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}5665 = 0{,}4335$.
d) $0{,}94^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}94} \approx 74{,}43$: mindestens 75 Spender.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Fahrten werden als unabhängige Bernoulli-Versuche mit $p = 0{,}65$ für „pünktlich“ modelliert. Nach Erwartungswert und kumulierten Wahrscheinlichkeiten wird ein beobachteter Wert mit dem Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ verglichen, um zu beurteilen, ob er ungewöhnlich ist.

a) $X \sim B(20; 0{,}65)$: $\mu = 13$ pünktliche Fahrten.
b) $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) \approx 1 - 0{,}7546 = 0{,}2454$.

c) $P(X \leq 10) \approx 0{,}1218$.
d) 9 verspätete heißt $X = 11$. Mit $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} \approx 2{,}13$ liegt 11 innerhalb von $[\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [10{,}9; 15{,}1]$. Das ist nicht außergewöhnlich.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Auszahlung ist eine Zufallsgröße mit vier Werten; ihre Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der Anzahl der Felder geteilt durch 12. Fair ist das Spiel, wenn die erwartete Auszahlung dem Einsatz entspricht. Für die Einnahmen der Klasse multipliziert man den erwarteten Verlust pro Dreh mit der Anzahl der Drehungen.

a) Auszahlung A: $E(A)=\frac{6\cdot1+2\cdot2+1\cdot2}{12}=\frac{12}{12}=1\,€$. Gewinn $= A - 1$, also $E(G)=0\,€$.
b) Allgemein: $E(A) = \frac{6+4+a}{12} = 1 \Leftrightarrow a = 2$. Für $a = 2$ ist das Spiel genau fair.
c) Für $a = 1$: $E(A)=\frac{11}{12}\,€$, also $E(G)=-\frac{1}{12}\,€\approx-0{,}083\,€$. Bei 600 Drehungen nimmt die Klasse etwa $600\cdot\frac{1}{12}=50\,€$ ein.
d) $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^5 \approx 0{,}3528$.
e) Ein großer Jackpot macht das Spiel attraktiv, aber die Einnahmen schwanken stark. Wichtig ist nur, dass $E(G)$ für den Spieler gilt; dann gewinnt die Klasse auf lange Sicht.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Aus der Lage des höchsten Balkens schätzt man den Erwartungswert und damit $p = \frac{\mu}{n}$. Die Form (rechtsschief oder linksschief) bestätigt die Wahl. Anschließend werden einzelne Balken und Intervallwahrscheinlichkeiten mit der Formel bzw. dem Taschenrechner berechnet.

a) Der höchste Balken steht bei $k = 4$; $\mu = 10p = 4$ liefert $p = 0{,}4$. Das Histogramm ist leicht rechtsschief, also p.
b) $P(X = 4) = \binom{10}{4}\, 0{,}4^4\, 0{,}6^6 \approx 0{,}2508$, also etwa $25{,}1\,\%$ wie der höchste Balken.
c) $P(X \leq 2) \approx 0{,}1673$.
d) Spiegelbildlich zur Mitte $k = 5$: Der höchste Balken stünde bei $k = 6$, das Histogramm wäre linksschief, denn $P_{0{,}6}(X = k) = P_{0{,}4}(X = 10 - k)$.
e) $\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 1{,}55$; $[4 - 1{,}55; 4 + 1{,}55]$ enthält 3, 4, 5: $P(3 \leq X \leq 5) \approx 0{,}6665$.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: In jeder Teilaufgabe ist ein anderer Parameter unbekannt. Man schreibt die gegebene Information als Gleichung: $(1-p)^n$ für „kein Treffer“, np für den Erwartungswert und $np(1-p)$ für die Varianz. Dann wird nach der Unbekannten aufgelöst und das Ergebnis auf Plausibilität geprüft.

a) $(1-p)^{10} = 0{,}2 \Rightarrow 1 - p = 0{,}2^{0{,}1} \approx 0{,}8513 \Rightarrow p \approx 0{,}1487$.
b) $0{,}3n = 24 \Rightarrow n = 80$; $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{16{,}8} \approx 4{,}10$.
c) $\sigma^2 = np(1-p) = 12(1-p) = 9 \Rightarrow 1 - p = 0{,}75 \Rightarrow p = 0{,}25$; $n = \frac{12}{0{,}25} = 48$.
d) $0{,}95^n \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}51$: mindestens 14 Versuche.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Die Lieferung wird angenommen, wenn höchstens ein defektes Leuchtmittel gefunden wird. Die Annahmewahrscheinlichkeit hängt vom unbekannten Ausschussanteil p ab und wird für mehrere Werte tabelliert. Daraus liest man die Risiken für Händler und Lieferant ab und vergleicht zwei Entscheidungsregeln.

a) Angenommen wird bei $X \leq 1$, also
$L(p) = P(X=0) + P(X=1) = (1-p)^{20} + \binom{20}{1} p(1-p)^{19}$.
b) $L(0{,}02) \approx 0{,}9401$; $L(0{,}05) \approx 0{,}7358$; $L(0{,}1) \approx 0{,}3917$; $L(0{,}2) \approx 0{,}0692$.
c) $1 - L(0{,}05) \approx 0{,}2642$, also in etwa $26\,\%$ der Fälle.
d) $L(0{,}2) \approx 0{,}0692$, also nur in etwa $6{,}9\,\%$ der Fälle.
e) Neue Regel: $P(X \leq 2)$. Für $p = 0{,}05$: $0{,}9245$ (gute Lieferungen werden seltener zurückgeschickt); für $p = 0{,}2$: $0{,}2061$ (schlechte Lieferungen werden häufiger angenommen). Der Vorteil für den Lieferanten ist ein Nachteil für den Baumarkt.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Hier werden zwei Binomialverteilungen hintereinander verwendet. Zuerst berechnet man mit $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit einer schlechten Woche. Diese Wahrscheinlichkeit ist dann die Trefferwahrscheinlichkeit einer zweiten Bernoulli-Kette über die 20 Wochen des Halbjahres.

a) $X \sim B(5;\,0{,}1)$: $P(X=0) = 0{,}9^5 \approx 0{,}5905$.
b) $P(X \geq 2) = 1 - 0{,}9^5 - 5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^4 \approx 1 - 0{,}5905 - 0{,}3281 = 0{,}0815$.
c) $Y \sim B(20;\,q)$ mit $q \approx 0{,}0815$: $E(Y) = 20q \approx 1{,}63$ schlechte Wochen.
d) $P(Y \leq 1) = (1-q)^{20} + 20q(1-q)^{19} \approx 0{,}5070$.
e) Zuerst zählt X die Verspätungen innerhalb einer Woche ($n = 5$, $p = 0{,}1$). Jede Woche ist dann selbst ein Bernoulli-Versuch mit „schlecht“ als Treffer; Y zählt die schlechten Wochen ($n = 20$, $p = q$).

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Wahrscheinlichkeiten wird mit der Definition des Binomialkoeffizienten vereinfacht. Ist er größer als eins, wachsen die Balken noch, sonst fallen sie. So erhält man eine allgemeine Regel für den wahrscheinlichsten Wert und prüft sie an einem Zahlenbeispiel.

a) $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!\,k!\,(n-k)!}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,n!} = \frac{n-k}{k+1}$; dazu kommt $\frac{p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{p^k(1-p)^{n-k}} = \frac{p}{1-p}$.
b) $Q(k) > 1 \Leftrightarrow (n-k)p > (k+1)(1-p) \Leftrightarrow np - kp > k + 1 - kp - p \Leftrightarrow k$.
c) $(n+1)p - 1 = 5{,}3$: Die Werte steigen bis $k = 6$ und fallen danach.
Wahrscheinlichster Wert $k = 6$: $P(X=5) \approx 0{,}1789$, $P(X=6) \approx 0{,}1916$, $P(X=7) \approx 0{,}1643$.
d) Zwei gleich hohe Balken entstehen, wenn $Q(k) = 1$, also $(n+1)p - 1 = k$ ganzzahlig: $10p \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, d. h. $p = 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 0{,}9$. Beispiel $p = 0{,}5$: $P(X=4) = P(X=5)$.