Lösungen zur Klassenarbeit - Anwendungen der Integralrechnung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Bestandsfunktion ist Anfangsbestand plus Integral der Zuflussrate; dafür gibt es zwei Bewertungseinheiten, eine für die Stammfunktion und eine für die Konstante. Der größte Bestand liegt an der Nullstelle der Rate mit Vorzeichenwechsel von plus nach minus (zwei BE). Für den Bestand am Ende wird eingesetzt und mit einem Antwortsatz gedeutet (eine BE).

a) $B(t) = 30 + \int_0^t (8 - 2s)\,ds = 30 + 8t - t^2$. (2 BE)
b) $r(t) = 0$ für $t = 4$ mit Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus;
$B(4) = 30 + 32 - 16 = 46$ Liter. (2 BE)
c) $B(8) = 30 + 64 - 64 = 30$ Liter: Zufluss und Abfluss gleichen sich im Zeitraum aus, der Behälter hat wieder den Anfangsbestand. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Verschiebung ist das Integral der Geschwindigkeit über das ganze Intervall, Vor- und Rückwärtsbewegung heben sich dabei teilweise auf (zwei BE). Für die Gesamtstrecke werden zuerst die Nullstellen der Geschwindigkeit bestimmt, das Intervall dort zerlegt und die Beträge der Teilintegrale addiert (zwei BE). Ein Vergleich beider Ergebnisse zeigt den Unterschied.

a) $V(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$, $V(5) - V(0) = \frac{125}{3} - 75 + 40 = \frac{20}{3}$ m. (2 BE)
b) Nullstellen 2 und 4; $V(2) = \frac{20}{3}$, $V(4) = \frac{16}{3}$. Strecken:
m. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Der Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall ist das Integral geteilt durch die Intervalllänge. Für den richtigen Ansatz und die korrekte Stammfunktion gibt es zwei Bewertungseinheiten. Anschließend setzt man die Funktion gleich dem Mittelwert und löst die lineare Gleichung; die Stelle muss im Intervall liegen (eine BE).

a) $\int_1^4 (2x + 1)\,dx = \left[x^2 + x\right]_1^4 = 20 - 2 = 18$; $\bar{f} = \frac{18}{3} = 6$. (2 BE)
b) $2x + 1 = 6 \Rightarrow x = 2{,}5$, die Mitte des Intervalls. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Das Rotationsvolumen um die x-Achse ist π mal das Integral des Quadrats der Funktion; das Quadrieren der Wurzel vereinfacht die

Rechnung erheblich (zwei BE). Für die gesuchte Grenze b wird das Volumen allgemein aufgestellt, gleich 100 gesetzt und nach b aufgelöst (zwei BE). Einheiten werden im Antwortsatz angegeben.

a) $V = \pi \int_0^8 2x\,dx = \pi\left[x^2\right]_0^8 = 64\pi \approx 201{,}1\,\text{cm}^3$. (2 BE)

b) $\pi b^2 = 100 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5{,}64$ cm. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Kostenfunktion ist eine Stammfunktion der Grenzkosten, deren Konstante gleich den Fixkosten ist; danach wird für zehn Stück eingesetzt (zwei BE). Die Zusatzkosten von zehn auf zwanzig Stück sind das Integral der Grenzkosten über dieses Intervall oder die Differenz zweier Kostenwerte (zwei BE). Beide Wege führen zum selben Ergebnis.

a) $K(x) = 80 + 0{,}2x^2 + 3x$, $K(10) = 80 + 20 + 30 = 130$ Euro. (2 BE)

b) $\int_{10}^{20} (0{,}4x + 3)\,dx = \left[0{,}2x^2 + 3x\right]_{10}^{20} = (80 + 60) - (20 + 30) = 90$ Euro. (2 BE)