Lernzettel - Anwendungen der Integralrechnung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Das Hochwasser im Rückhaltebecken

Nach tagelangem Regen schwillt ein Bach an, und das Rückhaltebecken einer Gemeinde füllt sich. Der Wasserwirtschaftsamt-Mitarbeiter liest am Pegel nicht die Wassermenge ab, sondern bekommt von Messstationen die Zuflussrate in Kubikmetern pro Stunde. Er muss entscheiden, ob das Becken überläuft und wann die Schleuse geöffnet werden muss. Dafür braucht er den Bestand, also die Wassermenge im Becken, und diesen berechnet er als Anfangsbestand plus Integral der Änderungsrate.

Dieses Kapitel bündelt die wichtigsten Anwendungen der Integralrechnung, die im Abitur vorkommen: Bestände aus Änderungsraten, Wege aus Geschwindigkeiten, Mittelwerte, Kosten aus Grenzkosten und Volumina von Rotationskörpern. Die Rechentechnik kennen Sie bereits aus den vorherigen Kapiteln; neu ist die Modellierung, also das Übersetzen eines Textes in ein Integral und das Deuten des Ergebnisses.

Änderungsraten und Bestände

Definition: Änderungsrate

Viele Abituraufgaben beschreiben einen Vorgang durch eine **Änderungsrate** $r(t)$: Zuflussrate eines Beckens in Litern pro Minute, Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde, Wachstumsrate einer Population, Verkaufsrate eines Produkts. Das Integral über die Rate liefert die **Gesamtänderung**: $\int_a^b r(t)\,dt$ ist die Menge, die zwischen den Zeitpunkten a und b hinzukommt (positiv) oder verloren geht (negativ). Der **Bestand** zum Zeitpunkt t ergibt sich aus dem Anfangsbestand: $B(t) = B(0) + \int_0^t r(s)\,ds$. Umgekehrt ist $B'(t) = r(t)$, die Rate ist also die Ableitung des Bestands.

Wichtig ist die **Deutung im Sachzusammenhang**: Ist $r(t) > 0$, nimmt der Bestand zu; ist $r(t)$, nimmt er ab. Der Bestand ist maximal oder minimal, wenn r das Vorzeichen wechselt, das heißt an einer Nullstelle von r mit Vorzeichenwechsel. Der Bestand kann auch dann noch zunehmen, wenn die Rate kleiner wird – solange sie positiv bleibt.

Beispiel 1

Ein Becken enthält zu Beginn 200 Liter. Die Zuflussrate beträgt $r(t) = 12 - 3t$ (Liter pro Minute, t in Minuten). Es gilt $B(t) = 200 + 12t - 1{,}5t^2$. Wegen $r(4) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ ist der Bestand bei $t = 4$ maximal: $B(4) = 200 + 48 - 24 = 224$ Liter.

Satz: Rekonstruktion eines Bestandes

Ist f die Änderungsrate eines Bestandes B, so gilt $B(t) = B(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$. Das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ ist die Gesamtänderung im Zeitraum $[a;b]$.

Weg und Geschwindigkeit

Definition: Verschiebung

Ist $v(t)$ die Geschwindigkeit, so ist $\int_a^b v(t)\,dt$ die **Verschiebung** (Änderung der Position) im Zeitraum von a bis b. Wechselt v das Vorzeichen, bewegt sich der Körper zwischendurch rückwärts. Die **zurückgelegte Gesamtstrecke** ist $\int_a^b |v(t)|\,dt$ und muss abschnittsweise an den Nullstellen von v berechnet werden.

Der Mittelwert einer Funktion

Der Mittelwert einer stetigen Funktion f auf $[a;b]$ ist $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Er gibt an, welche konstante Funktion über $[a;b]$ denselben Integralwert hätte. In Sachaufgaben ist das etwa die *durchschnittliche Zuflussrate* oder die *mittlere Temperatur*. Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$ auf $[0;3]$: $\int_0^3 (x^2+1)dx = 12$, also $\bar{f} = 4$.

Satz: Mittelwert einer Funktion

Der Mittelwert von f auf $[a;b]$ ist $\bar{m} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Rotationskörper

Rotiert der Graph von f über $[a;b]$ um die x-Achse, entsteht ein Körper mit dem Volumen $V = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$. Dahinter steckt die Idee: Jede dünne Scheibe an der Stelle x ist ein Zylinder mit Radius $f(x)$ und Höhe dx.

Beispiel 2: Kegel

Für $f(x) = x$ auf $[0;3]$ ist $V = \pi\int_0^3 x^2 dx = \pi\cdot 9 = 9\pi$. Zur Kontrolle: Kegel mit $r = 3$ und $h = 3$ hat $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 9\pi$.

Beispiel 3: Kugel

Für $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ auf $[-r;r]$ ergibt sich $V = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi\big[r^2 x - \frac{x^3}{3}\big]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Die Kugelformel ist also ein Spezialfall.

Beispiel 4: Gefäß

Das Gefäß entstehe durch Rotation von $f(x) = \sqrt{x}$ über $[0;4]$ (Maße in dm).
$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \cdot 8 = 8\pi \approx 25{,}1$ dm³, also etwa 25,1 Liter.

Satz: Rotationsvolumen

Rotiert der Graph von f über $[a;b]$ um die x-Achse, so hat der Körper das Volumen
$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$.

Weitere Beispiele

Beispiel 5: Bremsvorgang

Ein Zug bremst mit $v(t) = 30 - 1{,}5t$ (m/s). Er steht, wenn $30 - 1{,}5t = 0$, also nach $t = 20$ s. Der Bremsweg ist $\int_0^{20} (30 - 1{,}5t)\,dt = \big[30t - 0{,}75t^2\big]_0^{20} = 600 - 300 = 300$ m. Das entspricht der Fläche eines Dreiecks mit Grundseite 20 und Höhe 30, also $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 = 300$.

Beispiel 6: Verschiebung und Strecke

Für $v(t) = t - 2$ auf $[0;4]$ ist die Verschiebung $\big[\frac{t^2}{2} - 2t\big]_0^4 = 0$: Der Körper ist am Ende wieder am Startpunkt. Die Gesamtstrecke ist $\int_0^2 |v|\,dt + \int_2^4 |v|\,dt = 2 + 2 = 4$ Meter. An diesem Beispiel sieht man, warum Verschiebung und Gesamtstrecke verschieden sind.

Beispiel 7: Mittlere Rate

Fließen in 6 Stunden insgesamt 90 Kubikmeter Wasser durch ein Rohr, beträgt die mittlere Durchflussrate $\frac{90}{6} = 15$ m³ pro Stunde. Das ist genau der Mittelwert der Durchflussfunktion $q(t)$ auf $[0;6]$.

Kurzer Rückblick auf Modellierung

Definition: Definitionsmenge

In Modellierungsaufgaben ist die Funktion meist durch einen Term oder eine Grafik gegeben. Achten Sie auf die **Definitionsmenge** (nur sinnvolle Zeiten verwenden) und darauf, ob die Funktion eine Rate oder einen Bestand beschreibt. Bei Grafiken lesen Sie Nullstellen und Extrempunkte ab: Nullstellen der Rate sind mögliche Extremstellen des Bestands. Wenn der Operator „deuten Sie“ lautet, genügt ein Satz im Kontext, zum Beispiel: „Zwischen der 4. und der 6. Minute fließen netto 6 Liter ab.“

Vorgehen bei Sachaufgaben

So gehst du vor

1. Größen und Einheiten klären: Was ist Rate, was ist Bestand?
2. Zeitraum aus dem Text entnehmen und Grenzen festlegen.
3. Integral ansetzen, Stammfunktion bilden, auswerten.
4. Antwortsatz mit Einheit: „Im Zeitraum von … bis … nimmt … um … zu.“
5. Plausibilität prüfen: Passt das Vorzeichen zur Aufgabe, ist die Größenordnung sinnvoll?

Kosten und Gewinn aus Grenzfunktionen

In der Wirtschaft beschreibt die **Grenzkostenfunktion** $k(x)$, wie stark die Gesamtkosten steigen, wenn man eine weitere Mengeneinheit produziert. Sie ist die Ableitung der Kostenfunktion K, und deshalb gilt $K(x) = K(0) + \int_0^x k(s)\,ds$; der Anfangsbestand $K(0)$ sind die Fixkosten. Entsprechend ist der Grenzerlös $r(x)$ die Ableitung der Erlösfunktion. Der Zuwachs der Kosten beim Übergang von x_1 auf x_2 Mengeneinheiten ist das Integral $\int_{x_1}^{x_2} k(x)\,dx$, und der Gewinnzuwachs ist $\int_{x_1}^{x_2} \big(r(x) - k(x)\big)dx$. Das Gewinnmaximum liegt dort, wo Grenzerlös und Grenzkosten gleich sind und $r - k$ von Plus nach Minus wechselt.

Beispiel 8

Die Grenzkosten einer Bäckerei betragen $k(x) = 0{,}02x + 1$ Euro pro Brot bei einer Tagesproduktion von x Broten, die Fixkosten 120 Euro. Bestimmen Sie die Kosten für 100 Brote und die Zusatzkosten von 100 auf 150 Brote.

Die Kostenfunktion ist $K(x) = 120 + 0{,}01x^2 + x$. Für $x = 100$ gilt $K(100) = 120 + 100 + 100 = 320$ Euro. Die Zusatzkosten sind $\int_{100}^{150} (0{,}02x + 1)\,dx = \big[0{,}01x^2 + x\big]_{100}^{150} = (225 + 150) - (100 + 100) = 175$ Euro. Pro zusätzlichem Brot sind das durchschnittlich $3{,}50$ Euro, mehr als der Durchschnitt bei 100 Broten ($3{,}20$ Euro).

Rotationskörper zwischen zwei Graphen

Hohlkörper entstehen, wenn die Fläche zwischen zwei Graphen $f \geq g \geq 0$ um die x-Achse rotiert. Jede Scheibe ist dann ein Ring mit dem äußeren Radius $f(x)$ und dem inneren Radius $g(x)$. Das Volumen ist deshalb $V = \pi \int_a^b \big(f(x)^2 - g(x)^2\big)dx$. Wichtig ist hier das Quadrieren vor dem Subtrahieren: $V \neq \pi \int (f - g)^2 dx$.

Beispiel 9

Die Fläche zwischen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x$ über $[0;1]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Auf $[0;1]$ gilt $\sqrt{x} \geq x$. Dann ist $V = \pi \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$ VE.

Zum Vergleich: Der Vollkörper aus f allein hätte $\frac{\pi}{2}$, der aus g allein $\frac{\pi}{3}$; die Differenz ist $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Trapezsumme: Integrale aus Messtabellen

Liegt eine Änderungsrate nur als Messreihe vor, lässt sich das Integral nicht über eine Stammfunktion berechnen. Dann verbindet man die Messpunkte geradlinig und summiert die Trapezflächen: $T = \Delta t \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$. Bei einer Rate, die konkav ist, liegt die Trapezsumme unter dem exakten Integral, bei konvexen Funktionen darüber. Vergleichen Sie das Ergebnis immer mit der Größenordnung, die Sie aus dem Graphen erwarten.

Beispiel 10

Der Verkehr auf einer Brücke wurde stündlich gezählt (Fahrzeuge pro Stunde): 0, 400, 700, 900, 1000. Schätzen Sie die Zahl der Fahrzeuge in den vier Stunden.

Es ist $T = 1 \cdot \left(\frac{0}{2} + 400 + 700 + 900 + \frac{1000}{2}\right) = 2\,500$ Fahrzeuge. Die Rate steigt, aber immer langsamer, sie ist also konkav; der wahre Wert liegt etwas über $2\,500$.

Wusstest du? Das Fass des Kepler

Johannes Kepler berechnete 1615 das Volumen von Weinfässern, weil er bei seiner Hochzeit feststellte, dass Händler den Fassinhalt nur mit einem Messstab prüften. Seine Methode, das Fass in dünne Scheiben zu zerlegen, war ein Vorläufer des Rotationsvolumens $V = \pi \int f^2 dx$. Auch die Fassform ist ein Rotationskörper, nämlich ungefähr die Rotation einer Parabel um ihre Achse.

Rekonstruktion von Beständen im Überblick

In allen Anwendungen dieses Kapitels gilt derselbe Grundgedanke: Kennt man die momentane Änderungsrate einer Größe, so erhält man die Änderung des Bestands über einen Zeitraum als Integral der Rate. Den Bestand selbst bekommt man, indem man zum Anfangsbestand diese Änderung addiert. Eine positive Rate lässt den Bestand wachsen, eine negative lässt ihn schrumpfen. Achten Sie immer auf die Einheiten: Liter pro Minute mal Minuten ergibt Liter, Kilowatt mal Stunden ergibt Kilowattstunden. So erkennt man schnell, ob ein Ergebnis sinnvoll ist.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Rekonstruktion eines Bestands: $B(t) = B(0) + \int_0^t r(s)\,ds$ mit der Änderungsrate r; das Integral allein ist nur die Änderung, der Anfangsbestand kommt hinzu.
- Gesamtänderung im Intervall $[a;b]$: $\int_a^b r(t)\,dt$; die zurückgelegte Gesamtstrecke

braucht Beträge: $\int_a^b |v(t)|\,dt$, die Verschiebung nicht.
- Der Bestand hat Extrema an den Nullstellen der Rate mit Vorzeichenwechsel; bei $r > 0$ nimmt er zu, bei r ab.
- Mittelwert: $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ist die konstante Rate, die denselben Gesamtwert liefert.
- Rotation um die x-Achse: $V = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$; zwischen zwei Graphen $V = \pi\int_a^b \big(f^2 - g^2\big)dx$.
- Aus Grenzkosten werden Gesamtkosten: $K(x) = K(0) + \int_0^x k(s)\,ds$; die Fixkosten sind der Anfangsbestand.
- Bei Sachaufgaben immer Einheit und Bedeutung des Integrals notieren und einen Antwortsatz mit Zeitraum formulieren.
- Näherungsverfahren (Rechteck- und Trapezsummen) schätzen Integrale aus Messtabellen ab und werden mit dem exakten Wert verglichen.

Achtung: Typische Fehler

- Bestand und Änderungsrate verwechseln: Das Integral der Rate ist die *Änderung*, nicht der Bestand; der Anfangsbestand muss addiert werden.
- Bei der Strecke das Vorzeichen von v ignorieren und die Verschiebung für die Gesamtstrecke halten.
- Beim Rotationsvolumen π vergessen oder nicht f^2, sondern f integrieren.
- Den Mittelwert ohne den Faktor $\frac{1}{b-a}$ angeben.

Ottos Tipp: Schreibe immer die Einheit neben jede Größe. Liter pro Minute mal Minuten ergibt Liter – so erkennst du schnell, ob dein Ansatz stimmt!

Ottos Tipp

Schreiben Sie in jedem Sachkontext zuerst auf, was das Integral bedeutet (Gesamtänderung, Weg, Volumen) und welche Einheit es hat. Mit dieser Zeile bekommen Sie in der Abiturklausur schon Punkte für das Modellieren.