Arbeitsblatt - Anwendungen der Integralrechnung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Das Schwimmbecken

Ein Becken enthält zu Beginn 200 Liter Wasser. Die Zuflussrate beträgt $r(t) = 12 - 3t$ (Liter pro Minute, $0 \le t \le 10$, t in Minuten).

a) Bestimmen Sie die Bestandsfunktion $B(t)$.
b) Wann ist der Bestand maximal? Wie groß ist er dann?
c) Zu welchem Zeitpunkt ist wieder die Anfangsmenge von 200 Liter im Becken?
d) Wie viel Wasser ist nach 10 Minuten im Becken?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Die Bakterienkultur

Die Wachstumsrate einer Bakterienkultur beträgt $w(t) = 0{,}6t$ (in Millionen Zellen pro Stunde, t in Stunden). Zu Beginn sind 2 Millionen Zellen vorhanden.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Zellen nach 5 Stunden.
b) Wann sind es 20 Millionen Zellen?
c) Um wie viel Prozent wächst die Kultur zwischen der 4. und der 6. Stunde, bezogen auf den Bestand nach 4 Stunden?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Verschiebung und Gesamtstrecke

Ein Körper bewegt sich auf einer Geraden mit der Geschwindigkeit $v(t) = t^2 - 4t + 3$ (in m/s, $0 \le t \le 4$).

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von v und die Bewegungsrichtung in den Teilintervallen.
b) Berechnen Sie die Verschiebung im Zeitraum $[0;4]$.
c) Berechnen Sie die zurückgelegte Gesamtstrecke.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Anhalteweg

Ein Auto fährt mit 20 m/s. Der Fahrer reagiert nach 1 s (konstante Geschwindigkeit) und bremst dann mit $v(t) = 20 - 4(t-1)$ für $1 \le t \le 6$ bis zum Stillstand.

a) Berechnen Sie die Reaktionsstrecke.
b) Berechnen Sie den Bremsweg.
c) Wie lang ist der gesamte Anhalteweg? Ein Hindernis liegt 65 m entfernt. Kommt es zur Kollision?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Der Aufzug

Ein Aufzug fährt mit $v(t) = 0{,}5t - 0{,}05t^2$ (in m/s, $0 \le t \le 10$) nach oben.

a) Zeigen Sie, dass der Aufzug nach 10 s hält.
b) Wie hoch fährt er?
c) Wann ist die Geschwindigkeit maximal, und wie groß ist sie?
d) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Das Gewächshaus

Die Temperatur in einem Gewächshaus wird durch $T(t) = 18 - 6\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ (in $^\circ\mathrm{C}$, t in Stunden seit Mitternacht) beschrieben.

a) Wann ist es am kältesten und am wärmsten?
b) Berechnen Sie die mittlere Temperatur über 24 Stunden.
c) Berechnen Sie die mittlere Temperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Mittelwerte bestimmen

Bestimmen Sie den Mittelwert und eine Stelle, an der die Funktion ihn annimmt.

a) $f(x) = x^2 + 1$ auf $[0; 3]$
b) $f(x) = \sin x$ auf $[0; \pi]$
c) $f(x) = 2x + 1$ auf $[1; 4]$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Stromverbrauch

Der Stromverbrauch eines Haushalts wird zwischen 0 und 8 Uhr durch $p(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}8t + 2$ (in kW, t in Stunden) beschrieben.

a) Zeigen Sie, dass $p(t) > 0$ für alle t gilt.
b) Berechnen Sie den Energieverbrauch in diesen acht Stunden.
c) Bestimmen Sie die mittlere Leistung und die Kosten bei *0{,}35\,€* je kWh.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Rotationskörper um die x-Achse

Der Graph von f rotiert über dem angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen und prüfen Sie, wo möglich, mit einer Formel aus der Geometrie.

a) $f(x) = x$ auf $[0;3]$
b) $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0;4]$
c) $f(x) = 2$ auf $[0;5]$
d) $f(x) = x^2$ auf $[0;2]$

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Kugel und Kugelsegment

Der Halbkreis $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ rotiert um die x-Achse.

a) Berechnen Sie das Volumen der entstehenden Kugel über $[-3;3]$.
b) Berechnen Sie das Volumen der Kugelkappe über $[1;3]$.
c) Welchen Anteil hat die Kappe am Kugelvolumen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Pokal

Ein Pokal entsteht durch Rotation von $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ um die x-Achse ($0 \le x \le 16$, Maße in cm).

a) Berechnen Sie sein Fassungsvermögen in Millilitern.
b) Bis zu welcher Füllhöhe h (von der Spitze aus gemessen) enthält er 50 ml?
c) Welche Höhe hat er, wenn er 1 Liter fassen soll (Ansatz $0 \le x \le b$)?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Kosten und Zusatzkosten

Die Grenzkosten einer Bäckerei betragen $k(x) = 0{,}6x + 2$ (Euro pro 100 Brötchen bei x hundert Stück) und die Fixkosten 50 Euro.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion K.
b) Berechnen Sie die Kosten für $2\,000$ Brötchen ($x = 20$).
c) Wie hoch sind die Zusatzkosten bei einer Steigerung von $1\,000$ auf $2\,000$ Brötchen?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Ein Rohr als Hohlkörper

Die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x$ über $[0;1]$ rotiert um die x-Achse.

a) Zeigen Sie, dass $f \ge g$ auf $[0;1]$ gilt.

b) Berechnen Sie das Volumen des Hohlkörpers.
c) Erklären Sie, warum $\pi \int (f-g)^2 dx$ falsch wäre, und geben Sie den falschen Wert an.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Das Weinfass

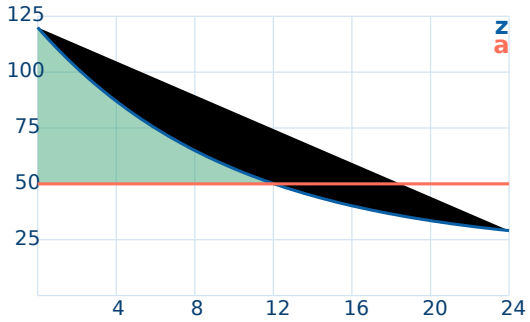
Ein Weinfass entsteht durch Rotation von $f(x) = 6 - 0{,}25x^2$ (Maße in dm, $-4 \le x \le 4$) um die x-Achse.

a) Welche Radien hat das Fass in der Mitte und an den Enden?
b) Berechnen Sie das Volumen in Litern ($1\,\mathrm{dm}^3 = 1$ Liter).
c) Eine Flasche fasst $0{,}75$ Liter. Wie viele Flaschen lassen sich füllen?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der Stausee im Frühjahr

Ein Stausee erhält die Zuflussrate $z(t) = 100\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 20$ und gibt konstant $a = 50$ ab (beides in m^3 pro Stunde, t in Stunden). Zu Beginn sind $1\,000\,\mathrm{m}^3$ im See.



a) Bestimmen Sie die Bestandsfunktion $B(t)$.
b) Wann ist der Bestand am größten? Wie groß ist er dann?
c) Wie groß ist der Bestand nach 48 Stunden?
d) Gegen welchen Wert strebt die Änderungsrate? Was bedeutet das langfristig?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Passstraße

Die Steigung einer Passstraße (in km Höhe pro km Strecke) wird durch $m(x) = 0{,}12 - 0{,}012x$ beschrieben, wobei x die Strecke in Kilometern ab dem Dorf ist ($0 \le x \le 10$). Das Dorf liegt auf 900 m.

a) Wie groß ist die Steigung am Anfang und am Ende? Geben Sie sie in Prozent an.
b) Bestimmen Sie die Höhe $h(x)$ über dem Dorf.
c) Wie viele Höhenmeter überwindet die Straße insgesamt?
d) Bei welcher Strecke ist die Passhöhe von $1\,300$ m erreicht?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Rate oder Bestand?

Entscheiden Sie, ob die Aussagen für jede Änderungsrate r und den zugehörigen Bestand B richtig sind, und begründen Sie.

a) Ist $r(t) > 0$, so ist B streng monoton wachsend.
b) Ist r fallend, so ist auch B fallend.
c) Der Bestand B hat an einer Nullstelle von r stets ein Extremum.
d) Ist $\int_a^b r(t)\,dt = 0$, so ist $r(t) = 0$ für alle $t \in [a;b]$.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die Vase

Eine Vase entsteht durch Rotation von $f(x) = 2 + 0{,}5x$ (Maße in cm, $0 \le x \le 6$) um die x-Achse.

a) Welchen Radius hat die Vase unten und oben?
b) Berechnen Sie das Volumen.
c) Bis zu welcher Höhe h steht das Wasser bei 100 ml?
d) Vergleichen Sie mit einem Zylinder gleicher Höhe und mittlerem Radius.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Parameter im Anwendungsfall

Die Zuflussrate eines Teichs ist $r_k(t) = k\,(6 - t)$ (in Litern pro Minute, $0 \le t \le 6$) mit $k > 0$.

a) Berechnen Sie die Gesamtzuflussmenge in Abhängigkeit von k.
b) Für welches k fließen genau 90 Liter in den Teich?
c) Berechnen Sie die mittlere Zuflussrate für dieses k.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Messreihe und Trapezsumme

Die Zuflussrate eines Beckens wurde stündlich gemessen.

t in h	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$ in $\mathrm{m^3/h}$	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3

a) Schätzen Sie die Zuflussmenge in den 6 Stunden mit der Trapezsumme.
b) Das Modell lautet $r(t) = 2t - 0{,}25t^2$. Berechnen Sie den exakten Wert.
c) Erklären Sie, warum die Trapezsumme hier etwas zu klein ist.