Lösungen - Anwendungen der Integralrechnung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Der Bestand ergibt sich aus dem Anfangsbestand plus dem Integral der Zuflussrate. Der Bestand ist maximal, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt, also an ihrer Nullstelle. Für weitere Zeitpunkte setzt man die Bestandsfunktion gleich dem gesuchten Wert.

a) $B(t) = 200 + \int_0^t (12 - 3s)\,ds = 200 + 12t - 1{,}5t^2$.

b) $r(t) = 0$ für $t = 4$, Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus: Maximum.
$B(4) = 200 + 48 - 24 = 224$ Liter.

c) $12t - 1{,}5t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ oder $t = 8$. Nach 8 Minuten ist wieder die Anfangsmenge im Becken.

d) $B(10) = 200 + 120 - 150 = 170$ Liter.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Die Zellzahl ist Anfangsbestand plus Integral der Wachstumsrate. Mit der Stammfunktion erhält man eine Bestandsfunktion, in die man Zeitpunkte einsetzt. Für einen gesuchten Zeitpunkt setzt man die Bestandsfunktion gleich dem Zielwert und löst die quadratische Gleichung.

a) $B(t) = 2 + 0{,}3t^2$; $B(5) = 2 + 7{,}5 = 9{,}5$ Millionen.

b) $2 + 0{,}3t^2 = 20 \Rightarrow t^2 = 60 \Rightarrow t = \sqrt{60} \approx 7{,}75$ h.

c) $B(4) = 6{,}8$, $B(6) = 12{,}8$; Zuwachs $6{,}0$, also $\frac{6}{6{,}8} \approx 88{,}2\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Wo die Geschwindigkeit negativ ist, bewegt sich der Körper rückwärts. Die Verschiebung ist das Integral über die Geschwindigkeit, bei dem sich Vor- und Rückwärtsbewegung aufheben. Für die Gesamtstrecke wird an den Nullstellen zerlegt und mit Beträgen addiert.

a) $(t-1)(t-3) = 0$: $t = 1$ und $t = 3$. Auf $[0;1]$ und $[3;4]$ gilt $v > 0$ (vorwärts), auf $(1;3)$ gilt v (rückwärts).

b) Mit $V(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$: $\int_0^4 v\,dt = V(4) - V(0) = \frac{64}{3} - 32 + 12 = \frac{4}{3}$ m.

c) Teilintegrale $\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$; Gesamtstrecke $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$ m.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Während der Reaktionszeit fährt das Auto mit konstanter Geschwindigkeit, die Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit. Der Bremsweg ist das

Integral der linear fallenden Geschwindigkeit bis zum Stillstand. Der Anhalteweg ist die Summe beider Teilstrecken.

a) $20\,\text{m/s} \cdot 1\,\text{s} = 20$ m.

b) $\int_1^6 (24 - 4t)\,dt = \left[24t - 2t^2\right]_1^6 = (144 - 72) - (24 - 2) = 50$ m.

c) $20 + 50 = 70$ m > 65 m: Ja, das Auto trifft das Hindernis noch, mit einer Restgeschwindigkeit. Aus $24t - 2t^2 - 22 = 45$ folgt $t \approx 4{,}42$ s, dort ist $v \approx 6{,}3$ m/s (rund 23 km/h).

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Der Aufzug hält, wenn die Geschwindigkeit null wird. Die Fahrhöhe ist das Integral der Geschwindigkeit. Die größte Geschwindigkeit liegt beim Scheitel der Parabel, die mittlere Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg geteilt durch die Fahrzeit.

a) $v(t) = 0{,}05t(10 - t) = 0$ für $t = 10$.

b) $h = \int_0^{10} (0{,}5t - 0{,}05t^2)\,dt = \left[0{,}25t^2 - \frac{t^3}{60}\right]_0^{10} = 25 - \frac{50}{3} = \frac{25}{3} \approx 8{,}33$ m.

c) $v'(t) = 0{,}5 - 0{,}1t = 0 \Rightarrow t = 5$; $v(5) = 2{,}5 - 1{,}25 = 1{,}25$ m/s.

d) $\bar{v} = \frac{25/3}{10} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$ m/s.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Kälteste und wärmste Zeit liest man am Kosinus ab: Er ist bei 0 am größten und bei π am kleinsten. Die mittlere Temperatur ist das Integral über einen Tag geteilt durch 24; der Kosinusanteil hebt sich über eine volle Periode auf.

a) Minimum bei $t = 0$ ($12\,^\circ\text{C}$), Maximum bei $t = 12$ ($24\,^\circ\text{C}$).

b) Der Kosinusterm mittelt sich über eine Periode zu null: $\bar{T} = 18\,^\circ\text{C}$.

c) $\int_6^{18} T\,dt = 216 - \frac{72}{\pi}\left[\sin\frac{\pi t}{12}\right]_6^{18} = 216 - \frac{72}{\pi}(-1 - 1) = 216 + \frac{144}{\pi}$;
$\bar{T} = 18 + \frac{12}{\pi} \approx 21{,}8\,^\circ\text{C}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Der Mittelwert einer Funktion auf $[a;b]$ ist $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Nach der Berechnung des Integrals setzt man die Funktion gleich dem Mittelwert und sucht eine Stelle im Intervall, an der er angenommen wird.

a) $\int_0^3 (x^2 + 1)\,dx = 12$, $\bar{f} = 4$; $x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

b) $\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$, $\bar{f} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$; $\sin x = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \approx 0{,}69$ oder $x \approx 2{,}45$.

c) $\int_1^4 (2x + 1)\,dx = \left[x^2 + x\right]_1^4 = 20 - 2 = 18$, $\bar{f} = 6$; $2x + 1 = 6 \Rightarrow x = 2{,}5$ (Mitte des Intervalls, da f linear).

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Die Positivität der Leistung zeigt man mit dem Scheitelpunkt der Parabel. Die verbrauchte Energie ist das Integral der Leistung über die Zeit, also Kilowatt mal Stunden. Die mittlere Leistung erhält man durch Teilen durch die Zeitspanne.

a) Scheitel bei $t = 4$: $p(4) = 1{,}6 - 3{,}2 + 2 = 0{,}4 > 0$; die Parabel ist nach oben geöffnet.

b) $\int_0^8 p\,dt = \left[\frac{t^3}{30} - 0{,}4t^2 + 2t\right]_0^8 = 17{,}07 - 25{,}6 + 16 = \frac{112}{15} \approx 7{,}47$ kWh.

c) $\bar{p} \approx \frac{7{,}47}{8} \approx 0{,}93$ kW; Kosten $7{,}47 \cdot 0{,}35 \approx 2{,}61\,€$.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Das Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse ist $\pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$. Man quadriert also zuerst die Funktion, integriert dann und multipliziert mit π. Bekannte Körper wie Kegel oder Zylinder dienen als Kontrolle.

a) $V = \pi \int_0^3 x^2 dx = 9\pi \approx 28{,}3$ VE (Kegel mit $r = h = 3$: $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3 = 9\pi$).

b) $V = \pi \int_0^4 x\,dx = 8\pi \approx 25{,}1$ VE.

c) $V = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi$ (Zylinder mit $r = 2$, $h = 5$).

d) $V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}\pi \approx 20{,}1$ VE.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Kugel entsteht durch Rotation des Halbkreises; das Quadrat der Funktion ist ein einfaches Polynom. Für die Kappe ändert man nur die Integrationsgrenzen. Der Anteil ist der Quotient aus Kappenvolumen und Kugelvolumen.

a) $V = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,dx = \pi \cdot 36 = 36\pi$; Probe $\frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$.

b) $V = \pi\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \pi\left(18 - \frac{26}{3}\right) = \frac{28}{3}\pi \approx 29{,}3$ VE.

c) $\frac{28/3}{36} = \frac{7}{27} \approx 25{,}9\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Das Fassungsvermögen ist ein Rotationsvolumen; $1\,\mathrm{cm}^3$ entspricht 1 ml. Für eine bestimmte Füllmenge setzt man das Volumen bis zur Höhe h gleich dem Zielwert und löst nach h auf. So lassen sich Markierungen am Pokal berechnen.

a) $V = \pi \int_0^{16} \frac{1}{4} x\,dx = \pi \cdot \frac{256}{8} = 32\pi \approx 100{,}5$ ml.

b) $\frac{\pi}{8}h^2 = 50 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{400}{\pi}} \approx 11{,}3$ cm.

c) $\frac{\pi}{8}b^2 = 1000 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{8000}{\pi}} \approx 50{,}5$ cm.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die Kostenfunktion ist eine Stammfunktion der Grenzkosten, deren Konstante die Fixkosten sind. Kosten für eine Menge erhält man durch Einsetzen. Zusatzkosten einer Mehrproduktion sind das Integral der Grenzkosten über das entsprechende Intervall.

a) $K(x) = 50 + 0{,}3x^2 + 2x$.
b) $K(20) = 50 + 120 + 40 = 210$ Euro.
c) $\int_{10}^{20} (0{,}6x + 2)\,dx = \left[0{,}3x^2 + 2x\right]_{10}^{20} = (120 + 40) - (30 + 20) = 110$ Euro.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Bei einem Hohlkörper wird das Volumen des inneren Körpers vom äußeren abgezogen. Es gilt deshalb $\pi \int (f^2 - g^2)\,\mathrm{d}x$ und nicht $\pi \int (f - g)^2\,\mathrm{d}x$. Zuerst wird geprüft, welche Funktion außen liegt.

a) Für $0 \le x \le 1$ gilt $\sqrt{x} \cdot (1 - \sqrt{x}) \ge 0$, also $x \le \sqrt{x}$.
b) $V = \pi \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$ VE.
c) Bei der Rotation entstehen Ringe mit dem Flächeninhalt $\pi(R^2 - r^2)$, nicht $\pi(R - r)^2$. Falsch wäre $\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x)^2 dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{30} \approx 0{,}105$, viel zu klein.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Radien sind die Funktionswerte in der Mitte und an den Enden. Das Volumen berechnet man als Rotationsintegral über das symmetrische Intervall; wegen der Symmetrie genügt die doppelte Hälfte. Mit $1\,\mathrm{dm}^3 = 1$ Liter wird in Flaschen umgerechnet.

a) Mitte: $f(0) = 6$ dm; Enden: $f(\pm 4) = 6 - 4 = 2$ dm.
b) $V = \pi \int_{-4}^{4} \left(36 - 3x^2 + \frac{x^4}{16}\right) dx = 2\pi \left(144 - 64 + \frac{64}{5}\right) = \frac{928}{5}\pi \approx 583$ Liter.
c) $\frac{583{,}1}{0{,}75} \approx 777$ Flaschen (abgerundet 777).

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Bestandsänderung ist Zuflussrate minus Abflussrate. Integriert man diese Differenz und addiert den Anfangsbestand, erhält man die Bestandsfunktion. Der höchste Stand liegt dort, wo Zufluss und Abfluss gleich groß sind.

a) $B(t) = 1000 + \int_0^t (100\mathrm{e}^{-0{,}1s} - 30)\,ds = 2000 - 1000\mathrm{e}^{-0{,}1t} - 30t$.
b) $B'(t) = 100\mathrm{e}^{-0{,}1t} - 30 = 0 \Rightarrow t = 10 \ln \frac{10}{3} \approx 12{,}04$ h (Vorzeichenwechsel $+ \to -$). $B \approx 1339\,\mathrm{m}^3$.
c) $B(48) = 2000 - 1000\mathrm{e}^{-4{,}8} - 1440 \approx 552\,\mathrm{m}^3$.
d) $B'(t) \to 20 - 50 = -30$: Der See verliert langfristig $30\,\mathrm{m}^3$ pro Stunde und läuft nach etwa 67 Stunden leer, wenn nichts geändert wird.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Die Steigung gibt an, wie viele Kilometer Höhe pro Kilometer Strecke gewonnen werden. Die Höhe ergibt sich als Anfangshöhe plus Integral der Steigung. Prozentangaben erhält man durch Multiplikation mit 100.

a) $m(0) = 0{,}12 = 12\,\%$; $m(10) = 0\,\%$.
b) $h(x) = 0{,}12x - 0{,}006x^2$ km über dem Dorf (Höhe in Kilometern).
c) $h(10) = 1{,}2 - 0{,}6 = 0{,}6$ km $= 600$ m.
d) Gesucht: $0{,}12x - 0{,}006x^2 = 0{,}4 \Rightarrow x^2 - 20x + 66{,}7 = 0 \Rightarrow x = 10 - \sqrt{33{,}3} \approx 4{,}23$ km.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Jede Aussage wird mit dem Zusammenhang zwischen Rate und Bestand geprüft: Das Vorzeichen der Rate bestimmt, ob der Bestand wächst; die Nullstellen der Rate mit Vorzeichenwechsel sind Extremstellen des Bestands. Falsche Aussagen widerlegt man mit einem Gegenbeispiel.

a) Wahr: $B' = r > 0$.
b) Falsch: $r(t) = 5 - t$ fällt, B steigt aber für t, solange $r > 0$.
c) Falsch: Es braucht einen Vorzeichenwechsel. Gegenbeispiel $r(t) = t^2$ mit $r(0) = 0$, aber B steigt monoton.
d) Falsch: $r(t) = t - 2$ auf $[0;4]$ hat das Integral 0, ist aber nicht null.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Radien unten und oben sind Funktionswerte an den Grenzen. Das Volumen der Vase entsteht als Rotationsintegral. Für die Füllhöhe einer gegebenen Wassermenge setzt man das Teilvolumen gleich dem Zielwert und löst die Gleichung, eventuell numerisch.

a) Unten $f(0) = 2$ cm, oben $f(6) = 5$ cm.
b) $V = \pi \int_0^6 (2 + 0{,}5x)^2 dx = \pi \left[\frac{(2+0{,}5x)^3}{1{,}5} \right]_0^6 = \pi \cdot \frac{125-8}{1{,}5} = 78\pi \approx 245{,}0$ ml.
c) $\pi \frac{(2+0{,}5h)^3 - 8}{1{,}5} = 100 \Rightarrow (2 + 0{,}5h)^3 = 8 + \frac{150}{\pi} \approx 55{,}75 \Rightarrow h \approx 3{,}64$ cm.
d) Zylinder mit dem mittleren Radius $3{,}5$ cm: $\pi \cdot 12{,}25 \cdot 6 \approx 230{,}9$ ml, die Vase fasst etwa $245{,}0$ ml. Der Mittelwert der Quadrate $f(x)^2$ ist größer als das Quadrat des Mittelwerts von f, weil die Quadratfunktion nach oben gekrümmt ist.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Das Integral der Zuflussrate liefert die Gesamtmenge in Abhängigkeit von k. Eine vorgegebene Menge führt auf eine lineare Gleichung für k. Weitere Fragen werden mit diesem k beantwortet.

a) $\int_0^6 k(6 - t)\,dt = k \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^6 = 18k$ Liter.
b) $18k = 90 \Rightarrow k = 5$.

c) $\bar{r} = \frac{90}{6} = 15$ Liter pro Minute.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Mit der Trapezsumme werden die Flächenstreifen zwischen den Messpunkten als Trapeze genähert und addiert. Das Ergebnis wird mit dem exakten Integral des Modells verglichen. Die Abweichung zeigt die Güte der Näherung.

a) $T = 1 \cdot \left(\frac{0}{2} + 1{,}75 + 3 + 3{,}75 + 4 + 3{,}75 + \frac{3}{2}\right) = \frac{71}{4} = 17{,}75\,\mathrm{m}^3$.

b) $\int_0^6 (2t - 0{,}25t^2)\,dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{12}\right]_0^6 = 36 - 18 = 18\,\mathrm{m}^3$.

c) Die Rate ist konkav (nach unten gekrümmt). Die Sehnen der Trapeze liegen unterhalb des Graphen, deshalb ist die Trapezsumme $(17{,}75)$ kleiner als der exakte Wert (18).