Lösungen zur Klassenarbeit - Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Beim fairen Würfel sind alle sechs Augenzahlen gleich wahrscheinlich, es handelt sich um ein Laplace-Experiment. Dann gilt $P(E) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}}$.
a) Primzahlen unter 1 bis 6 sind 2, 3 und 5; die 1 ist keine Primzahl (1 P.). Also $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (1 P.).
b) „Mindestens 5“ umfasst die Ergebnisse 5 und 6 (1 P.). Damit $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$ (1 P.). Kontrolle über das Gegenereignis: $P(\text{Augenzahl} \le 4) = \frac{4}{6}$, und $1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$.
Antwort: $P(\text{Primzahl}) = 0{,}5$ und $P(\text{mindestens } 5) = \frac{1}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Im Baumdiagramm ändern sich beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe.
a) Erster Zug rot: $\frac{3}{5}$. Danach liegen noch 2 rote unter 4 Kugeln, also $\frac{2}{4}$. Pfadregel (multiplizieren): $P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0{,}3$ (2 P.).
b) Zwei verschiedene Farben gibt es auf zwei Pfaden: $P(rb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ und $P(br) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$. Summenregel: $P = \frac{12}{20} = 0{,}6$ (2 P.). Kontrolle: $P(bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$, und $0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}1 = 1$. Wer versehentlich mit Zurücklegen rechnet, erhält $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}36$ für a); das ist falsch, weil die gezogene Kugel fehlt. Antwort: $P(rr) = 0{,}3$, $P(\text{verschiedene Farben}) = 0{,}6$.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Vierfeldertafel (Zeilen Jungen/Mädchen, Spalten mit/ohne Smartphone): Jungen 15 | 3 | 18; Mädchen 17 | 5 | 22; Summe 32 | 8 | 40 (2 P.). Die fehlenden Felder ergeben sich als Differenzen, etwa $18 - 15 = 3$ Jungen ohne Smartphone.
b) Insgesamt besitzen 32 von 40 ein Smartphone: $P(S) = \frac{32}{40} = 0{,}8$ (1 P.). Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit schränkt man die Grundmenge auf die 32 Smartphone-Besitzer ein; davon sind 17 Mädchen: $P(M \mid S) = \frac{17}{32} \approx 0{,}531$ (1 P.). Nicht verwechseln mit $P(S \mid M) = \frac{17}{22} \approx 0{,}773$. Antwort: $0{,}8$ und etwa $53{,}1\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

Die drei Würfe sind unabhängig; Treffer T mit $0{,}6$, Fehlwurf F mit $0{,}4$.
a) Pfad TTT: $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$ (2 P.).
b) Genau zwei Treffer liefern die drei Pfade TTF, TFT, FTT, jeder mit

$0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}144$. Summe: $3 \cdot 0{,}144 = 0{,}432$ (2 P.).
c) „Mindestens einmal“ rechnet man am einfachsten über das Gegenereignis „kein Treffer“ (FFF): $0{,}4^3 = 0{,}064$. Also $P = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$ (1 P.). Kontrolle: $P(\text{genau einmal}) = 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}288$, und $0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}936$. Antwort: $21{,}6\,\%$, $43{,}2\,\%$, $93{,}6\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Zwei Ereignisse heißen unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit ihres gemeinsamen Eintretens gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (1 P.). Rechnung: $0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$, und laut Aufgabe ist $P(A \cap B) = 0{,}1$. Die Bedingung ist erfüllt, A und B sind unabhängig (1 P.).
Gleichwertig: $P(A \mid B) = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5 = P(A)$; das Eintreten von B verändert die Chance für A nicht.
b) Nach dem Additionssatz $P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}6$ (1 P.). Die Schnittmenge wird abgezogen, weil sie sonst doppelt gezählt würde. Antwort: unabhängig; $P(A \cup B) = 0{,}6$.