Lernzettel - Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Klasse: Klasse 9

Wahrscheinlichkeiten beschreiben, wie sicher ein Ereignis eintritt. Du lernst einstufige und mehrstufige Experimente, die Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeiten kennen.

Einstieg: Lohnt sich das Spiel?

Auf dem Jahrmarkt steht ein Glücksrad. Für 2 € Einsatz darfst du drehen, mit etwas Glück gewinnst du 20 €. Lohnt sich das? Um das zu beurteilen, musst du wissen, wie wahrscheinlich die einzelnen Gewinne sind. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt dir Werkzeuge: Du zählst günstige und mögliche Ergebnisse, zeichnest Baumdiagramme für mehrstufige Versuche und ordnest Daten in Vierfeldertafeln. Dabei lernst du auch, dass der Zufall oft unserer Intuition widerspricht: Ein medizinischer Test mit $95\,\%$ Trefferquote kann bei einem positiven Ergebnis trotzdem oft falsch liegen, und in einer Klasse mit 25 Schülern haben sehr wahrscheinlich zwei am selben Tag Geburtstag. In diesem Kapitel lernst du, solche Fragen sicher zu beantworten.

Grundbegriffe

Definition: Zufallsexperiment und Ereignis

Ein **Zufallsexperiment** hat mehrere mögliche **Ergebnisse**, von denen man vorher nicht weiß, welches eintritt. Die Menge aller Ergebnisse heißt **Ergebnismenge** Ω. Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge davon, zum Beispiel „gerade Zahl“ beim Würfeln: $\{2, 4, 6\}$.

Definition: Laplace-Experiment

Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, spricht man von einem **Laplace-Experiment**. Dann gilt $P(E) = \dfrac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$. Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 1; das sichere Ereignis hat $P = 1$, das unmögliche $P = 0$.

Beispiel 1: Würfel

Berechne beim Würfeln $P(6)$, $P(\text{gerade})$, $P(\text{Primzahl})$ und $P(>4)$.

$P(6) = \frac{1}{6}$, $P(\text{gerade}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(\text{Primzahl}) = \frac{3}{6}$ (2, 3, 5), $P(>4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Satz: Gegenereignis

Das **Gegenereignis** tritt genau dann ein, wenn E nicht eintritt: .

Das spart bei „mindestens einmal“ viel Arbeit.

Beispiel 2: Mindestens eine Sechs

Wie wahrscheinlich ist bei zwei Würfen mindestens eine 6?

Gegenereignis: keine 6. $P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Merke: Gesetz der großen Zahlen

Wiederholt man ein Experiment oft, nähert sich die **relative Häufigkeit** $h = \frac{\text{Treffer}}{\text{Versuche}}$ der Wahrscheinlichkeit an. Bei 200 Würfen mit 38 Sechsen ist $h = 0{,}19$; mit mehr Würfen nähert sich h dem Wert $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

Mehrstufige Experimente und Baumdiagramm

Definition: Baumdiagramm

Experimente mit mehreren Schritten stellt man als **Baumdiagramm** dar. An die Äste schreibt man die Wahrscheinlichkeiten, die Endpunkte der Pfade sind die Ergebnisse.

Satz: Pfadregeln

- **1. Pfadregel (Produktregel):** Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.
- **2. Pfadregel (Summenregel):** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus mehreren Pfaden ist die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten.

Die Äste, die von einem Punkt ausgehen, ergeben zusammen immer 1.

So gehst du vor: Baumdiagramm

1. Zeichne die Stufen als Verzweigungen und schreibe an jeden Ast die Wahrscheinlichkeit als Bruch.
2. Beachte: Ohne Zurücklegen ändern sich die Zahlen im zweiten Zug.
3. Multipliziere entlang der Pfade und addiere die Pfade des gesuchten Ereignisses.
4. Kontrolliere, ob alle Pfade zusammen 1 ergeben.

Beispiel 3: Mit Zurücklegen

Eine Urne enthält 3 rote und 2 blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$, $P(bb) = \frac{4}{25}$.

$P(\text{verschieden}) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.

Beispiel 4: Ohne Zurücklegen

Dieselbe Urne, zwei Kugeln ohne Zurücklegen.

$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $P(bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

$P(\text{verschieden}) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$.

Vierfeldertafel

Definition: Vierfeldertafel

Mit einer **Vierfeldertafel** ordnest du zwei Merkmale A und B und ihre Gegenteile. In den Feldern stehen absolute Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten, am Rand die Summen.

Regel: Aufbau

	B		**Summe**
A	$P(A \cap B)$		$P(A)$
Summe	$P(B)$		1

Beispiel 5: Haustiere

In einer Klasse mit 30 Schülern sind 18 Mädchen. 20 Kinder haben ein Haustier, davon 11 Mädchen. Fülle die Tafel aus.

7 Mädchen haben kein Haustier, 9 Jungen haben ein Haustier $(20 - 11)$ und 3 Jungen keines $(12 - 9)$.

Zeilen- und Spaltensummen prüfen alles.

Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition: Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse sind **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

Beispiel 6: Unabhängig?

Es ist $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}2$. Und bei $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$,

$P(A \cap B) = 0{,}2$**?**

$0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$: unabhängig.

$0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 \neq 0{,}2$: abhängig.

Satz: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A schon eingetreten ist: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Du betrachtest nur die Zeile von A.

Beispiel 7: Mädchen mit Haustier

Wie wahrscheinlich hat ein Mädchen ein Haustier?

$\frac{11}{18} \approx 0{,}61$. Man betrachtet nur die Zeile der Mädchen.

Beispiel 8: Wetter

Regen am Samstag: 0,3. Regnet es samstags, regnet es sonntags mit 0,6, sonst mit 0,2. Berechne $P(\text{beide Tage Regen})$, $P(\text{Sonntag Regen})$ und $P(\text{beide trocken})$.

Beide Tage Regen: $0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

Sonntag Regen: $0{,}18 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$.

Beide trocken: $0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Die Summenregel und »mindestens einmal«

Für zwei beliebige Ereignisse gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Du ziehst den Schnitt ab, weil er sonst doppelt gezählt würde. Bei Fragen mit »mindestens einmal« ist oft das Gegenereignis einfacher: $P(\text{mindestens einmal}) = 1 - P(\text{keinmal})$. Bei fünf Würfen mit einem Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für »mindestens eine Sechs« gleich $1 - (\frac{5}{6})^5 \approx 0{,}598$, viel einfacher als alle Fälle mit einer, zwei, drei, vier oder fünf Sechsen zu addieren.

Beispiel 9: Mindestens eine Sechs

Wie wahrscheinlich ist bei vier Würfen mindestens eine Sechs?

Keine Sechs in einem Wurf: $\frac{5}{6}$. In vier Würfen: $(\frac{5}{6})^4 \approx 0{,}482$. Gegenereignis: $1 - 0{,}482 = 0{,}518$. Mehr als die Hälfte.

Anzahl der Möglichkeiten zählen

Bei mehrstufigen Vorgängen multiplizierst du die Anzahl der Möglichkeiten jeder Stufe (Zählprinzip). Mit Wiederholung gibt es n^k Möglichkeiten, ohne Wiederholung

$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$. Alle Anordnungen von n verschiedenen Dingen heißen Permutationen und sind $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$. Wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt, teilt man durch die Anzahl der Anordnungen: Das gibt den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Beispiel 10: Reihenfolgen

Auf wie viele Arten können 5 Kinder in einer Reihe stehen? Auf wie viele Arten kann man aus 5 Kindern 2 auswählen?

Reihen: $5! = 120$. Auswahl von 2 (ohne Reihenfolge): $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Erwartungswert und Gesetz der großen Zahlen

Bei einem Glücksspiel mit den Auszahlungen x_i und den Wahrscheinlichkeiten p_i ist der Erwartungswert $E = \sum x_i \cdot p_i$. Er gibt an, was man auf lange Sicht im Mittel pro Spiel bekommt. Das Gesetz der großen Zahlen sagt: Je häufiger man ein Zufallsexperiment wiederholt, desto näher liegt die relative Häufigkeit eines Ereignisses an seiner Wahrscheinlichkeit. Nach nur wenigen Würfen kann ein Würfel durchaus vier Sechsen hintereinander zeigen, nach $10\,000$ Würfen liegt der Anteil sehr nahe bei $\frac{1}{6}$.

Beispiel 11: Würfelspiel

Du bekommst bei einer Sechs 6 €, sonst nichts. Der Einsatz ist 1 €. Lohnt sich das?

$E = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ €. Auszahlung gleich Einsatz: Das Spiel ist fair, langfristig weder Gewinn noch Verlust.

Achtung: Typische Denkfehler

Der Zufall hat kein Gedächtnis: Nach fünfmal Kopf ist beim sechsten Wurf Kopf wieder genau so wahrscheinlich wie Zahl. Wer glaubt, nun sei Zahl »überfällig«, begeht den Spielerfehlschluss. Ein weiterer Fehler: Wahrscheinlichkeiten addieren, obwohl die Ereignisse nicht unvereinbar sind. Bei abhängigen Ereignissen dürfen die Wahrscheinlichkeiten nicht einfach multipliziert werden, du brauchst die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Wusstest du?

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand im Jahr 1654 aus einem Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat über Glücksspiele. Heute stützt sich auf sie alles von der Wettervorhersage bis zu Versicherungen und medizinischen Studien.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Laplace-Experiment: $P(E) = \frac{\text{günstige}}{\text{alle}}$ bei gleich wahrscheinlichen Ergebnissen;

$0 \leq P \leq 1$, .

- Baumdiagramm: 1. Pfadregel (Produkt entlang eines Pfads), 2. Pfadregel (Summe über Pfade).
- Mit Zurücklegen bleiben die Wahrscheinlichkeiten gleich, ohne Zurücklegen ändern sich Zähler und Nenner.
- Vierfeldertafel: Zeilen- und Spaltensummen; aus zwei bekannten Werten lassen sich die anderen berechnen.
- Unabhängigkeit: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P_A(B)$ und $P_B(A)$ sind im Allgemeinen verschieden.
- Summenregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; »mindestens einmal« oft über das Gegenereignis.
- Gesetz der großen Zahlen: Bei vielen Versuchen nähert sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit; der Erwartungswert ist $E = \sum x_i \cdot p_i$.

Achtung

Beim Ziehen ohne Zurücklegen musst du die Wahrscheinlichkeiten im zweiten Zug anpassen. Addiere und multipliziere Pfade nicht vertauscht. „Genau eine rote und eine blaue“ hat zwei Pfade (rb und br). Schließe aus Häufigkeiten nur bei vielen Versuchen auf die Wahrscheinlichkeit. Die Summe der Äste an einer Verzweigung ist immer 1.

Zum Einstieg: Der Reißzwecken-Versuch

Wirf eine Reißzwecke hundertmal und notiere, wie oft sie auf dem Kopf und wie oft sie auf der Seite liegen bleibt. Anders als beim Würfel weißt du vorher nicht, wie groß die Wahrscheinlichkeiten sind. Nach vielen Würfen stabilisiert sich aber die relative Häufigkeit, zum Beispiel bei etwa 0,6 für „Seite“. Diesen Wert nimmt man dann als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit. Das nennt man das Gesetz der großen Zahlen. Je mehr Würfe du machst, desto zuverlässiger wird dieser Schätzwert.

Beispiel 12

In einer Schule fahren 60 % der Schüler mit dem Bus. Von den Busfahrern kommen 10 % manchmal zu spät, von den übrigen Schülern 5 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Schüler manchmal zu spät kommt?

Wir zeichnen ein zweistufiges Baumdiagramm. Auf der ersten Stufe steht „Bus“ mit 0,6 und „kein Bus“ mit 0,4. Auf der zweiten Stufe folgt „zu spät“ mit 0,1 bzw. 0,05. Nach der ersten Pfadregel gilt $0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$ und $0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}02$. Nach der zweiten Pfadregel addieren wir: $0{,}06 + 0{,}02 = 0{,}08$. Antwort: Mit 8 % Wahrscheinlichkeit kommt ein zufällig gewählter Schüler manchmal zu spät.

Häufige Fehler

Verwechsle nicht $P_A(B)$ und $P_B(A)$: Der Anteil der Kranken unter den positiv Getesteten ist etwas ganz anderes als der Anteil der positiv Getesteten unter den Kranken. Bei „ohne Zurücklegen“ ändern sich die Nenner auf der zweiten Stufe. Und bei „mindestens einmal“ ist das Gegenereignis fast immer der schnellere Weg.

Ottos Tipp

Zeichne immer zuerst das Baumdiagramm und schreibe an jeden Ast die Wahrscheinlichkeit als Bruch. Kontrolliere: Alle Pfade zusammen ergeben 1. Bei „mindestens“ lohnt der Weg über das Gegenereignis. Die Vierfeldertafel hilft, wenn zwei Merkmale gegeben sind und nach einer Teilgruppe gefragt wird.