Arbeitsblatt - Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Klasse: Klasse 9 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Laplace-Experiment mit dem Würfel

Bei einem Laplace-Experiment sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Es gilt $P(E) = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{alle Ergebnisse}}$. Ein fairer Würfel wird einmal geworfen.

a) Berechne $P(\text{gerade Zahl})$.
b) Berechne $P(\text{Augenzahl} > 4)$.
c) Berechne $P(\text{Primzahl})$ (Primzahlen: $2, 3, 5$).
d) Berechne $P(\text{durch 3 teilbar})$ und $P(\text{nicht durch 3 teilbar})$.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Die Urne

In einer Urne liegen 7 rote, 5 blaue und 3 gelbe Kugeln. Du ziehst eine Kugel.

Farbe	rot	blau	gelb
Anzahl	7	5	3

a) Berechne $P(\text{rot})$, $P(\text{blau})$, $P(\text{gelb})$.
b) Berechne $P(\text{nicht blau})$ mit dem Gegenereignis.
c) Berechne $P(\text{rot oder gelb})$.
d) Wie viele gelbe Kugeln müsste man zulegen, damit $P(\text{gelb}) = \frac{1}{3}$ ist?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Das Glücksrad

Ein Glücksrad hat drei Sektoren: rot (90°), grün (120°) und gelb (150°). Die Wahrscheinlichkeit ist der Anteil am Vollwinkel.

Farbe	Winkel
rot	90°
grün	120°
gelb	150°

a) Berechne die drei Wahrscheinlichkeiten als Brüche.
b) Zeige, dass die Summe 1 ergibt.
c) Wie wahrscheinlich ist »nicht gelb«?

d) Das Rad wird 120-mal gedreht. Wie oft erwartest du grün?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Dreimal Münzwurf

Eine faire Münze wird dreimal geworfen (K für Kopf, Z für Zahl).

a) Schreibe alle Ergebnisse auf. Wie viele gibt es?
b) Berechne $P(\text{genau zweimal Kopf})$.
c) Berechne $P(\text{mindestens einmal Kopf})$ mit dem Gegenereignis.
d) Berechne $P(\text{alle drei gleich})$.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Baumdiagramm mit Zurücklegen

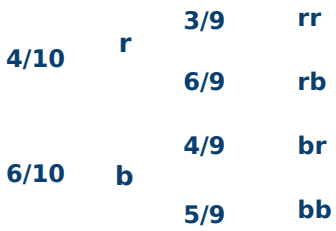
In einer Urne liegen 4 rote und 6 blaue Kugeln. Du ziehst zweimal und legst die erste Kugel zurück. Nach der ersten Pfadregel multiplizierst du die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfads.

a) Zeichne ein Baumdiagramm und beschrifte die Äste.
b) Berechne $P(rr)$ und $P(bb)$.
c) Berechne $P(\text{zwei verschiedene Farben})$ mit der zweiten Pfadregel (Pfade addieren).
d) Prüfe: Die vier Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben zusammen 1.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Baumdiagramm ohne Zurücklegen

Dieselbe Urne (4 rot, 6 blau), aber die erste Kugel wird nicht zurückgelegt.



a) Erkläre, warum sich die Wahrscheinlichkeiten auf der zweiten Stufe ändern.
b) Berechne $P(rr)$ und $P(bb)$.
c) Berechne $P(\text{zwei verschiedene Farben})$.
d) Vergleiche mit dem Ergebnis mit Zurücklegen.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die Vierfeldertafel: Haustiere

In der Klasse 9c sind 25 Schüler: 14 Mädchen und 11 Jungen. Insgesamt haben 14 ein Haustier, davon 9 Mädchen.

	Haustier	kein Haustier	Summe
Mädchen	9	?	14
Jungen	?	?	11
Summe	14	?	25

a) Ergänze die Vierfeldertafel.
b) Berechne $P(\text{Haustier})$ und $P(\text{Mädchen und Haustier})$.
c) Berechne $P(\text{Junge ohne Haustier})$.
d) Wie viele Schüler sind Mädchen oder haben ein Haustier?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Bedingte Wahrscheinlichkeit

Mit der Tafel aus Aufgabe 7 berechnest du bedingte Wahrscheinlichkeiten: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Das ist der Anteil von B innerhalb von A.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen ein Haustier hat?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler mit Haustier ein Mädchen ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Junge ein Haustier hat?
d) Warum sind die beiden ersten Werte hier gleich, in der Regel aber verschieden?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Unabhängig oder abhängig?

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

a) $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}2$
b) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}15$
c) Würfel: A = »gerade«, B = »größer als 3«
d) Würfel: A = »gerade«, B = »Primzahl«

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das Zahlenschloss

Ein Zahlenschloss hat drei Ringe mit den Ziffern 0 bis 9.

a) Wie viele Zahlenkombinationen gibt es?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Kombination beim ersten Versuch zu erraten?
c) Wie viele Kombinationen haben drei verschiedene Ziffern?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Ziffern gleich sind?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Zwei Würfel

Zwei faire Würfel werden geworfen. Es gibt 36 gleich wahrscheinliche Ergebnisse.

Summe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Ergebnisse	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

a) Wie wahrscheinlich ist die Augensumme 7?
b) Wie wahrscheinlich ist ein Pasch (zwei gleiche Zahlen)?
c) Wie wahrscheinlich ist eine Augensumme von mindestens 10?
d) Wie wahrscheinlich ist $\text{Summe} \geq 2$? Wie wahrscheinlich ist die Summe 1?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Schulbus

Der Bus zur Schule ist mit $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit pünktlich. Das Ereignis an zwei aufeinanderfolgenden Tagen ist unabhängig.

a) Zeichne ein Baumdiagramm für zwei Tage (p = pünktlich, v = verspätet).
b) Berechne $P(\text{an beiden Tagen pünktlich})$.
c) Berechne $P(\text{genau einmal verspätet})$.
d) Berechne $P(\text{mindestens einmal verspätet})$ auf zwei Arten.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Regen und Schirm

Die Wahrscheinlichkeit für Regen ist $30\,\%$. Bei Regen nimmt Mia mit $90\,\%$ einen Schirm mit, ohne Regen mit $20\,\%$.

Wetter	Wahrscheinlichkeit	Schirm
Regen	30 %	90 %
kein Regen	70 %	20 %

a) Zeichne den Baum und berechne $P(\text{Regen und Schirm})$.
b) Berechne $P(\text{Schirm})$.
c) Berechne $P(\text{Regen} \mid \text{Schirm})$ (bedingte Wahrscheinlichkeit).
d) An wie vielen von 100 Tagen hat Mia unnötig einen Schirm dabei?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Der medizinische Test

Eine Krankheit trifft $2\,\%$ der Bevölkerung. Ein Test erkennt Kranke mit $95\,\%$ (positiv) und zeigt bei Gesunden mit $4\,\%$ fälschlich positiv an. Stell dir $10\,000$ Menschen vor.

	Test positiv	Test negativ	Summe
krank	?	?	200
gesund	?	?	9800
Summe	?	?	10 000

a) Ergänze die Vierfeldertafel.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(\text{positiv})$?
c) Ein Test fällt positiv aus. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Person wirklich krank ist?
d) Warum ist das Ergebnis so viel kleiner als $95\,\%$?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Das Geburtstagsproblem

Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben? Nimm 365 gleich wahrscheinliche Tage an. Es gilt $P = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$.

a) Berechne P für $n = 2$ (zwei Personen).
b) Berechne P für $n = 10$ und $n = 23$ (Taschenrechner).
c) Für $n = 25$ (eine Klasse): Wie hoch ist P? Überrascht dich das Ergebnis?
d) Für welches n wird P erstmals größer als $50\,\%$?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Glücksrad und der Erwartungswert

Ein Glücksrad auf dem Jahrmarkt kostet $2{,}50$ € Einsatz. Es zahlt aus:

Gewinn	Wahrscheinlichkeit
0 €	50 %
2 €	30 %
5 €	15 %
20 €	5 %

a) Berechne den Erwartungswert $E = \sum x_i \cdot p_i$ der Auszahlung.
b) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn oder Verlust pro Spiel (Einsatz abziehen)?
c) Wie viel Gewinn oder Verlust erwartest du nach 100 Spielen?
d) Wie müsste der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Lotto 6 aus 49

Beim Lotto werden 6 Zahlen aus 49 gezogen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge). Die Zahl der Möglichkeiten ist $\binom{49}{6}$.

a) Wie viele Tippreihen gibt es?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau drei Richtige? Es gibt $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}$ günstige Möglichkeiten.
d) Wie oft müsste man spielen, damit sechs Richtige im Durchschnitt einmal vorkommen?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Elfmeterschießen

Ein Schütze trifft mit $75\,\%$ Wahrscheinlichkeit. Er schießt fünf Elfmeter, die Schüsse sind unabhängig. Es gilt $P(k\ \text{Treffer}) = \binom{5}{k} \cdot 0{,}75^{k} \cdot 0{,}25^{5-k}$.

Treffer k	0	1	2	3	4	5
Wahrscheinlichkeit	?	?	?	?	?	?

a) Berechne $P(5)$ und $P(4)$.
b) Berechne $P(3)$.
c) Berechne $P(\text{mindestens } 3)$.
d) Wie viele Treffer erwartest du im Mittel ($n \cdot p$)?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Das Kartenspiel

Ein Skatblatt hat 32 Karten: vier Farben (Kreuz, Pik, Herz, Karo) mit je acht Karten, darunter je ein Ass. Du ziehst verdeckt Karten.

a) Berechne $P(\text{Ass})$ und $P(\text{Herz})$ bei einer Karte.
b) Berechne $P(\text{Herz oder Ass})$ mit der Summenregel.
c) Du ziehst zwei Karten ohne Zurücklegen. Berechne $P(\text{zwei Asse})$.
d) Wie wahrscheinlich ist es, dass beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen mindestens ein Ass dabei ist?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Das Ziegenproblem

In einer Spielshow gibt es drei Türen. Hinter einer steht ein Auto, hinter den anderen beiden je eine Ziege. Du wählst Tür 1. Der Moderator, der weiß, wo das Auto steht, öffnet eine andere Tür mit einer Ziege und bietet dir an zu wechseln.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass das Auto hinter deiner gewählten Tür steht?
b) Wie wahrscheinlich gewinnst du, wenn du bei deiner Tür bleibst?
c) Wie wahrscheinlich gewinnst du, wenn du wechselst? Begründe mit einem Baumdiagramm oder mit Fällen.
d) Simuliere im Kopf: Bei 30 Spielen mit der Wechselstrategie, wie oft erwartest du ein Auto?