Lösungen - Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

Ein fairer Würfel hat sechs gleich wahrscheinliche Ergebnisse. Man schreibt jeweils die günstigen Ergebnisse als Menge auf und teilt ihre Anzahl durch 6.
a) $\{2,4,6\}$: $\frac{3}{6} = 0{,}50$. Drei von sechs Augenzahlen sind gerade.
b) $\{5,6\}$: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$. Mehr als 4 bedeutet 5 oder 6.
c) $\{2,3,5\}$: $\frac{3}{6} = 0{,}50$. Die Primzahlen unter den Augenzahlen sind 2, 3 und 5 (die 1 ist keine Primzahl).
d) $\{3,6\}$: $\frac{1}{3}$; Gegenereignis: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Das Gegenereignis enthält alle Ergebnisse, die nicht durch 3 teilbar sind; seine Wahrscheinlichkeit ist 1 minus die des Ereignisses.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\frac{7}{15} \approx 0{,}467$; $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Insgesamt sind $7 + 5 + 3 = 15$ Kugeln in der Urne; man teilt die Anzahl jeder Farbe durch 15.
b) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Das Gegenereignis von „blau“ ist „nicht blau“; seine Wahrscheinlichkeit ist 1 minus $P(\text{blau})$.
c) $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ (Summenregel: $\frac{7}{15} + \frac{3}{15}$). Rot und gelb schließen sich aus, deshalb darf man die Wahrscheinlichkeiten addieren; das Ergebnis stimmt mit b) überein.
d) $\frac{3+x}{15+x} = \frac{1}{3}$, $9 + 3x = 15 + x$, $2x = 6$, $x = 3$. Man legt x gelbe Kugeln dazu, stellt die Gleichung auf und löst sie. Antwort: Man muss 3 gelbe Kugeln hinzufügen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$; $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$; $\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit ist der Winkel des Sektors geteilt durch 360°.
b) $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1$. Die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ergeben zusammen immer 1.
c) $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$. „Nicht gelb“ ist das Gegenereignis von gelb.
d) $120 \cdot \frac{1}{3} = 40$-mal. Die erwartete Anzahl ist die Zahl der Drehungen mal die Wahrscheinlichkeit; tatsächlich kann es etwas mehr oder weniger sein.

Lösung zu Aufgabe 4

a) KKK, KKZ, KZK, ZKK, KZZ, ZKZ, ZZK, ZZZ: $2^3 = 8$ Ergebnisse. Bei jedem Wurf gibt es 2 Möglichkeiten, bei drei Würfen $2 \cdot 2 \cdot 2$.
b) KKZ, KZK, ZKK: $\frac{3}{8} = 0{,}375$. Drei der acht gleich wahrscheinlichen Ergebnisse enthalten genau zweimal K.

c) $1 - P(ZZZ) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$. Das Gegenereignis von „mindestens einmal Kopf“ ist „nie Kopf“, also ZZZ.
d) KKK und ZZZ: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Nur zwei Ergebnisse haben drei gleiche Seiten.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Erste Stufe: $r: \frac{4}{10}$, $b: \frac{6}{10}$. Zweite Stufe wieder $r: \frac{4}{10}$, $b: \frac{6}{10}$. Weil die Kugel zurückgelegt wird, sind die Wahrscheinlichkeiten auf beiden Stufen gleich.
b) $P(rr) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$; $P(bb) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$. Nach der ersten Pfadregel multipliziert man entlang des Pfades.
c) $P(rb) + P(br) = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$. Zwei Pfade führen zu verschiedenen Farben; nach der zweiten Pfadregel addiert man ihre Wahrscheinlichkeiten.
d) $0{,}16 + 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}36 = 1{,}00$. Die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten ist 1; das ist eine gute Kontrolle.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Nach der ersten Ziehung sind nur noch 9 Kugeln in der Urne, und eine Farbe hat eine Kugel weniger. Deshalb hängen die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe vom Ergebnis der ersten Ziehung ab.
b) $P(rr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133$; $P(bb) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. Man multipliziert entlang der Pfade und kürzt die Brüche.
c) $1 - \frac{12}{90} - \frac{30}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$. Man rechnet mit dem Gegenereignis „gleiche Farbe“.
d) Mit Zurücklegen $0{,}48$, ohne $0{,}533$: Verschiedene Farben sind ohne Zurücklegen wahrscheinlicher. Ohne Zurücklegen ist nach einer roten Kugel eine blaue etwas wahrscheinlicher und umgekehrt.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Mädchen ohne Haustier $14 - 9 = 5$; Jungen mit Haustier $14 - 9 = 5$; Jungen ohne $11 - 5 = 6$; ohne Haustier insgesamt 11. Man füllt die Tafel so, dass jede Zeile und jede Spalte die angegebene Summe ergibt.
b) $\frac{14}{25} = 0{,}56$; $\frac{9}{25} = 0{,}36$. Man teilt die Anzahl der Haustierbesitzer bzw. der Mädchen mit Haustier durch die Gesamtzahl 25.
c) $\frac{6}{25} = 0{,}24$. Man liest die Anzahl der Jungen ohne Haustier aus der Tafel ab.
d) $14 + 14 - 9 = 19$ (Summe, minus doppelt gezählte Mädchen mit Haustier). Wer Mädchen ist oder ein Haustier hat, wird gezählt; die Mädchen mit Haustier dürfen nur einmal gezählt werden.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $\frac{9}{14} \approx 0{,}643$. Man betrachtet nur die 14 Mädchen; 9 von ihnen haben ein Haustier.
b) $\frac{9}{14} \approx 0{,}643$. Hier betrachtet man nur die 14 Haustierbesitzer; 9 davon sind Mädchen.
c) $\frac{5}{11} \approx 0{,}455$. Man betrachtet nur die 11 Jungen; 5 haben ein Haustier. Bei Mädchen ist ein Haustier also häufiger.

d) Hier sind es zufällig gleich viele Mädchen (14) wie Schüler mit Haustier (14). Im Allgemeinen sind die Gesamtzahlen verschieden, dann sind $P_A(B)$ und $P_B(A)$ verschieden. Man muss deshalb immer genau darauf achten, auf welche Gruppe sich die Bedingung bezieht.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 = P(A \cap B)$: unabhängig. Man multipliziert $P(A)$ und $P(B)$ und vergleicht mit $P(A \cap B)$.
b) $0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 \neq 0{,}15$: abhängig. Das Produkt weicht von der Schnittwahrscheinlichkeit ab.
c) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $A \cap B = \{4, 6\}$: $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$: abhängig. Man bestimmt die Mengen und ihre Schnittmenge und vergleicht.
d) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $A \cap B = \{2\}$: $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$: abhängig. Auch hier stimmt das Produkt nicht mit der Schnittwahrscheinlichkeit überein.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Für jeden der drei Ringe gibt es 10 Möglichkeiten (Produktregel).
b) $\frac{1}{1000} = 0{,}001$. Genau eine der 1000 Kombinationen ist richtig.
c) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Für den ersten Ring gibt es 10, für den zweiten noch 9 und für den dritten noch 8 Möglichkeiten.
d) Zehn Kombinationen (000, 111, ...): $\frac{10}{1000} = 0{,}01$. Für jede der 10 Ziffern gibt es genau eine Kombination mit drei gleichen Ziffern.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Sechs der 36 Ergebnisse haben die Summe 7: (1|6), (2|5), (3|4), (4|3), (5|2), (6|1).
b) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Ein Pasch sind die sechs Ergebnisse (1|1) bis (6|6).
c) $\frac{3+2+1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Summe 10, 11 oder 12 hat 3, 2 und 1 Ergebnisse; man addiert.
d) Die Summe ist immer mindestens 2: Wahrscheinlichkeit 1 (sicheres Ereignis). Summe 1 ist unmöglich: 0. Ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 1 heißt sicher, eines mit Wahrscheinlichkeit 0 unmöglich.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Erste Stufe p : $0{,}8$, v : $0{,}2$; zweite Stufe ebenso. Weil die Tage unabhängig sind, sind die Wahrscheinlichkeiten auf beiden Stufen gleich.
b) $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$. Man multipliziert entlang des Pfades pp.
c) $2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$. Zwei Pfade (pv und vp) führen zu genau einer Verspätung.
d) $1 - 0{,}64 = 0{,}36$; Probe: $0{,}32 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}36$. „Mindestens einmal verspätet“ ist das Gegenereignis von „beide Tage pünktlich“.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$. Man multipliziert entlang des Pfades „Regen, Schirm“.
b) $0{,}27 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}27 + 0{,}14 = 0{,}41$. Zwei Pfade führen zu „Schirm“: mit Regen und ohne Regen; man addiert sie.
c) $\frac{0{,}27}{0{,}41} \approx 0{,}659$, also etwa $66\,\%$. Man teilt die Wahrscheinlichkeit für „Regen und Schirm“ durch die Wahrscheinlichkeit für „Schirm“.
d) $100 \cdot 0{,}14 = 14$ Tage. An 70 % der 100 Tage regnet es nicht; davon nimmt Mia an 20 % unnötig den Schirm mit.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Kranke positiv: $200 \cdot 0{,}95 = 190$; Kranke negativ 10; Gesunde positiv: $9800 \cdot 0{,}04 = 392$; Gesunde negativ 9408; positiv gesamt 582, negativ 9418. Man rechnet mit absoluten Zahlen: 2 % von 10000 sind 200 Kranke, 9800 Gesunde.
b) $\frac{582}{10\,000} = 0{,}0582$. Man teilt alle positiven Tests durch 10000.
c) $\frac{190}{582} \approx 0{,}326$, also nur etwa $33\,\%$. Man betrachtet nur die 582 positiv Getesteten; nur 190 davon sind krank.
d) Es gibt viel mehr Gesunde als Kranke. Auch ein kleiner Anteil falscher Alarme unter vielen Gesunden (392) übertrifft die Zahl der echten Treffer (190). Deshalb muss ein positives Ergebnis bei seltenen Krankheiten mit einem zweiten Test überprüft werden.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $P = 1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365} \approx 0{,}0027$. Bei 2 Personen ist das Gegenereignis „verschiedene Geburtstage“ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{364}{365}$.
b) $n = 10$: $P \approx 0{,}117$; $n = 23$: $P \approx 0{,}507$. Man berechnet das Produkt mit dem Taschenrechner und zieht es von 1 ab.
c) $n = 25$: $P \approx 0{,}569$, also über $56\,\%$. Das Ergebnis überrascht, weil es so viele Paare gibt: $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$. Viele Paare bedeuten viele Möglichkeiten für einen gemeinsamen Geburtstag.
d) $n = 22$: $P = 0{,}476$; $n = 23$: $P = 0{,}507$. Also erstmals bei 23 Personen. Schon in einer Schulklasse ist ein gemeinsamer Geburtstag also wahrscheinlicher als keiner.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $E = 0 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}05 = 2{,}35$ €. Man multipliziert jeden Gewinn mit seiner Wahrscheinlichkeit und addiert.
b) $2{,}35 - 2{,}50 = -0{,}15$ €: Verlust von 15 ct pro Spiel. Man subtrahiert den Einsatz vom Erwartungswert.
c) $100 \cdot (-0{,}15) = -15$ €. Auf lange Sicht verliert man also im Mittel 15 € bei 100 Spielen.
d) Ein faires Spiel hat $E =$ Einsatz, also $2{,}35$ €. Damit das Spiel fair ist, dürfte der Einsatz nur so hoch sein wie die mittlere Auszahlung.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$. Man wählt 6 aus 49 Zahlen ohne Reihenfolge.
b) $\frac{1}{13\,983\,816} \approx 7{,}15 \cdot 10^{-8}$. Nur eine Tippreihe hat sechs Richtige.
c) $\frac{20 \cdot 12\,341}{13\,983\,816} = \frac{246\,820}{13\,983\,816} \approx 0{,}0177$ (etwa $1{,}8\,\%$). Man multipliziert die Möglichkeiten für Richtige und Falsche und teilt durch alle Tippreihen.
d) Etwa 14 Millionen Spiele (wöchentlich zweimal: $\approx 134\,460$ Jahre). Im Mittel müsste man also etwa 14 Millionen Mal spielen, um einmal sechs Richtige zu haben.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $P(5) = 0{,}75^5 \approx 0{,}2373$; $P(4) = 5 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}3955$. Für fünf Treffer gibt es nur eine Reihenfolge, für vier Treffer fünf (der Fehlschuss kann jeder der fünf sein).
b) $P(3) = 10 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^2 \approx 0{,}2637$. Für drei Treffer gibt es $\binom{5}{3} = 10$ Reihenfolgen.
c) $0{,}2373 + 0{,}3955 + 0{,}2637 \approx 0{,}896$. „Mindestens drei“ bedeutet drei, vier oder fünf Treffer; man addiert.
d) $5 \cdot 0{,}75 = 3{,}75$ Treffer. Der Erwartungswert ist Anzahl der Schüsse mal Trefferwahrscheinlichkeit.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $\frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Es gibt 4 Asse und 8 Herzkarten unter 32 Karten.
b) $\frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32} \approx 0{,}344$ (das Herz-Ass wird sonst doppelt gezählt). Man addiert und subtrahiert die Schnittmenge, die sonst doppelt gezählt würde.
c) $\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{12}{992} = \frac{3}{248} \approx 0{,}0121$. Ohne Zurücklegen ist nach dem ersten Ass nur noch 3 von 31 Karten ein Ass.
d) Kein Ass: $\frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} = \frac{756}{992}$; also $1 - \frac{756}{992} = \frac{236}{992} \approx 0{,}238$. „Mindestens ein Ass“ berechnet man am einfachsten mit dem Gegenereignis „kein Ass“.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$. Am Anfang ist jede der drei Türen gleich wahrscheinlich.
b) Bleiben: $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$. Das Öffnen der Ziegentür ändert nichts daran, ob deine erste Wahl richtig war.
c) Wechseln: Du gewinnst genau dann, wenn dein erster Tipp falsch war ($\frac{2}{3}$), denn der Moderator zeigt dann die andere Ziege und die verbleibende Tür hat das Auto. Also $\frac{2}{3}$. Beim Wechseln verdoppelt sich die Gewinnchance.
d) $30 \cdot \frac{2}{3} = 20$ Autos (gegenüber 10 beim Bleiben). Wechseln lohnt sich also deutlich.