Lösungen zur Klassenarbeit - Wachstum und Zerfall

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Bei einer Zunahme um $p\,\%$ ist der Wachstumsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$. Hier: $q = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$ (1 P.).
b) Jedes Jahr wird das Guthaben mit $1{,}04$ multipliziert, weil die Zinsen mitverzinst werden (Zinseszins). Nach drei Jahren: $K_3 = 200 \cdot 1{,}04^3 = 200 \cdot 1{,}124864 \approx 224{,}97$ € (2 P.). Zum Vergleich: Ohne Zinseszins wären es nur $200 + 3 \cdot 8 = 224$ €.
c) Allgemein ist der Bestand Anfangswert mal Faktor hoch Anzahl der Jahre: $K(t) = 200 \cdot 1{,}04^t$, t in Jahren (1 P.). Probe: $K(0) = 200$ €, der Anfangswert stimmt. Antwort: $q = 1{,}04$; nach drei Jahren etwa $224{,}97$ €; $K(t) = 200 \cdot 1{,}04^t$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Die Halbwertszeit ist die Zeit, nach der nur noch die Hälfte vorhanden ist. 12 h entsprechen $\frac{12}{4} = 3$ Halbwertszeiten. Dreimal halbieren: $600 \to 300 \to 150 \to 75$, also $600 \cdot 0{,}5^3 = 75$ mg (2 P.).
b) 6 h sind $\frac{6}{4} = 1{,}5$ Halbwertszeiten, deshalb ist der Exponent keine ganze Zahl: $m(6) = 600 \cdot 0{,}5^{1{,}5} \approx 600 \cdot 0{,}3536 \approx 212{,}1$ mg (2 P.). Plausibilitätskontrolle: Der Wert muss zwischen 300 mg (nach 4 h) und 150 mg (nach 8 h) liegen; das trifft zu. Falsch wäre lineares Mitteln (225 mg), weil Zerfall exponentiell verläuft. Antwort: 75 mg bzw. etwa 212 mg.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Man vergleicht aufeinanderfolgende Werte. Tabelle A: $12 : 4 = 36 : 12 = 108 : 36 = 3$; die Quotienten sind konstant, also wächst A exponentiell. Tabelle B: $12 - 4 = 20 - 12 = 28 - 20 = 8$; die Differenzen sind konstant, also wächst B linear (2 P.).
b) Für A gilt $y = a \cdot b^x$ mit Startwert $a = 4$ (bei $x = 0$) und Faktor $b = 3$: $y = 4 \cdot 3^x$. Für B gilt $y = mx + n$ mit Steigung $m = 8$ und Achsenabschnitt $n = 4$: $y = 8x + 4$ (2 P.). Probe für $x = 3$: $4 \cdot 27 = 108$ und $8 \cdot 3 + 4 = 28$, beide Werte stimmen mit der Tabelle überein. Antwort: A exponentiell, B linear.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Ein Wachstum um $20\,\%$ pro Stunde ergibt den Faktor $1{,}2$. Nach fünf Stunden: $N(5) = 300 \cdot 1{,}2^5 = 300 \cdot 2{,}48832 \approx 746$ Bakterien (2 P.).
b) Gesucht ist die kleinste ganze Zahl t mit $300 \cdot 1{,}2^t > 1000$, also $1{,}2^t > 3{,}33$. Probieren: $1{,}2^6 \approx 2{,}986$ reicht nicht (≈ 896 Bakterien), $1{,}2^7 \approx 3{,}583$ reicht (≈ 1075 Bakterien). Also nach 7 Stunden (2 P.).

c) Der Gesamtfaktor nach fünf Stunden ist $1{,}2^5 \approx 2{,}488$. Zunahme in Prozent: $(2{,}488 - 1) \cdot 100\,\% \approx 148{,}8\,\%$ (1 P.). Nicht $5 \cdot 20\,\% = 100\,\%$, weil jeweils vom neuen Bestand gerechnet wird. Antwort: 746 Bakterien, nach 7 h, etwa $148{,}8\,\%$ mehr.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Ein Wertverlust von $20\,\%$ pro Jahr bedeutet, dass jedes Jahr $80\,\%$ des Vorjahreswerts übrig bleiben, also der Faktor $0{,}8$. Schrittweise: $900 \to 720 \to 576 \to 460{,}80$ €. Kurz: $W(3) = 900 \cdot 0{,}8^3 = 900 \cdot 0{,}512 = 460{,}80$ € (2 P.).

b) Der Anteil am Neupreis ist der Gesamtfaktor $0{,}8^3 = 0{,}512$, also $51{,}2\,\%$ (1 P.). Kontrolle: $460{,}80 : 900 = 0{,}512$. Häufiger Fehler: $3 \cdot 20\,\% = 60\,\%$ Verlust annehmen und $40\,\%$ angeben; tatsächlich beträgt der Verlust nur $48{,}8\,\%$, weil sich jede Abnahme auf den bereits gesunkenen Wert bezieht. Antwort: Nach drei Jahren ist der Laptop $460{,}80$ € wert, das sind $51{,}2\,\%$ des Neupreises.