Lernzettel - Wachstum und Zerfall

Klasse: Klasse 9

Bevölkerungen, Bakterien, Pflanzen und radioaktive Stoffe verändern sich mit der Zeit. Zwei Modelle sind besonders wichtig: lineares und exponentielles Wachstum.

Einstieg: Zwei Angebote für das Taschengeld

Tim darf wählen: Entweder bekommt er vier Wochen lang jede Woche 10 € mehr als in der Woche davor ($10, 20, 30, 40$), oder er bekommt in der ersten Woche 1 € und dann jede Woche das Doppelte. Welches Angebot ist besser? Die ersten Wochen sprechen für das erste: 10 gegen 1, 20 gegen 2, 30 gegen 4. Aber nach zehn Wochen bekommt er im zweiten Angebot schon 512 € in einer Woche, im ersten nur 100 €. Das erste Angebot beschreibt lineares Wachstum, das zweite exponentielles Wachstum. Exponentielles Wachstum beginnt langsam, wird aber immer schneller. Wir finden es bei Zinsen, Bevölkerung, Bakterien, Viren und in der Technik. Der umgekehrte Vorgang, bei dem etwas immer langsamer abnimmt, heißt exponentieller Zerfall und beschreibt zum Beispiel radioaktive Stoffe.

Lineares Wachstum

Definition: lineares Wachstum

Beim **linearen Wachstum** kommt in gleichen Zeitabschnitten immer *derselbe Betrag* dazu (oder geht weg). Die Funktionsgleichung ist $f(t) = b + m \cdot t$ mit Anfangswert b und Zuwachs m pro Zeiteinheit. Der Graph ist eine Gerade, in der Wertetabelle sind die **Differenzen** konstant.

Beispiel 1: Pflanze

Eine Pflanze ist 12 cm hoch und wächst 3 cm pro Woche. Wie hoch ist sie nach 8 Wochen, wann sind es 60 cm?

$h(t) = 12 + 3t$. Nach 8 Wochen: $12 + 24 = 36$ cm.

$12 + 3t = 60$, also $t = 16$ Wochen.

Exponentielles Wachstum und Zerfall

Definition: exponentielles Wachstum

Beim **exponentiellen Wachstum** wird der Bestand in gleichen Zeitabschnitten mit *demselben Faktor* multipliziert: $N(t) = N_0 \cdot q^t$. Dabei ist N_0 der Anfangswert und q der **Wachstumsfaktor**. In der Wertetabelle sind die **Quotienten** konstant. Bei $q > 1$ liegt Wachstum vor, bei 0 Zerfall.

Beispiel 2: Bakterien

100 Bakterien verdoppeln sich jede Stunde. Wie viele sind es nach 5 und nach 8 Stunden?

$N(t) = 100 \cdot 2^t$. Nach 5 Stunden $100 \cdot 32 = 3200$, nach 8 Stunden $100 \cdot 256 = 25\,600$.

Wachstumsfaktor und Prozentsatz

Satz: Wachstumsfaktor

Bei einer prozentualen Änderung von $p\,\%$ gilt $q = 1 + \frac{p}{100}$. Bei Zunahme ist $p > 0$, bei Abnahme p.

Änderung	$+5\,\%$	$+12\,\%$	$-8\,\%$	$-30\,\%$	$+100\,\%$
Faktor q	$1{,}05$	$1{,}12$	$0{,}92$	$0{,}70$	2

Umgekehrt: $q = 1{,}035$ bedeutet $+3{,}5\,\%$, $q = 0{,}85$ bedeutet $-15\,\%$.

Beispiel 3: Bevölkerung wächst

Eine Stadt hat 20 000 Einwohner und wächst um 2 % pro Jahr. Wie viele Einwohner sind es nach 10 Jahren?

$q = 1{,}02$. Nach einem Jahr 20 400, nach zwei Jahren 20 808.

Nach 10 Jahren: $20\,000 \cdot 1{,}02^{10} \approx 24\,380$. Das ist mehr als linear mit 400 pro Jahr, denn die Zunahme wird jedes Jahr größer.

Beispiel 4: Zerfall

Von 200 mg eines Stoffes werden täglich 10 % abgebaut. Wie viel bleibt nach 3 Tagen?

$q = 0{,}9$. $200 \cdot 0{,}9^3 = 145{,}8$ mg.

Halbwertszeit

Definition: Halbwertszeit

Die **Halbwertszeit** T ist die Zeit, in der sich ein Bestand halbiert: $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$.

Analog gibt es die **Verdopplungszeit**.

Beispiel 5: Halbwertszeit

80 g eines Stoffes haben die Halbwertszeit 5 Tage. Wie viel bleibt nach 15 Tagen?

Nach 5 Tagen 40 g, nach 10 Tagen 20 g, nach 15 Tagen 10 g, nach 20 Tagen 5 g.

Modell erkennen und Parameter bestimmen

So gehst du vor: Linear oder exponentiell?

1. Bilde die Differenzen benachbarter Werte.
2. Bilde die Quotienten benachbarter Werte.
3. Sind die Differenzen konstant, ist es linear mit m als Differenz.
4. Sind die Quotienten konstant, ist es exponentiell mit q als Quotient.

Beispiel 6: Tabellen

Welches Wachstum zeigen 5; 8; 11; 14 und 2; 6; 18; 54?

5; 8; 11; 14: Differenz stets 3, also linear mit $m = 3$.

2; 6; 18; 54: Quotient stets 3, also exponentiell mit $q = 3$.

Beispiel 7: Faktor aus zwei Werten

Ein Bestand wächst in 2 Stunden von 50 auf 200. Ein anderer sinkt in 3 Tagen von 64 auf 27.

$50 \cdot q^2 = 200$, also $q^2 = 4$ und $q = 2$ pro Stunde.

$q^3 = \frac{27}{64}$, also $q = \frac{3}{4} = 0{,}75$, das sind $-25\,\%$ pro Tag.

Beispiel 8: Anfangswert

Nach 3 Jahren gibt es 1331 Tiere bei 10 % Wachstum pro Jahr. Wie viele waren es am Anfang?

$N_0 \cdot 1{,}1^3 = 1331$, also $N_0 = \frac{1331}{1{,}331} = 1000$.

Beispiel 9: Linear gegen exponentiell

Angebot A: Start 100, +20 pro Woche. Angebot B: Start 100, +10 % pro Woche. Welches ist besser?

Nach 10 Wochen: A 300, B $100 \cdot 1{,}1^{10} \approx 259{,}37$.

Nach 15 Wochen: A 400, B $\approx 417{,}72$. Ab Woche 15 ist B größer. Auf lange Sicht gewinnt exponentielles Wachstum immer.

Beispiel 10: Verdopplungszeit

Wann verdoppelt sich ein Bestand bei 3 % Wachstum pro Jahr?

$1{,}03^{23} \approx 1{,}97$ und $1{,}03^{24} \approx 2{,}03$. Nach etwa 24 Jahren, wenn du probierst, bis der Faktor 2 überschritten wird.

Prozentuale Änderung und Zinseszins

Zinseszins ist das bekannteste Beispiel für exponentielles Wachstum. Bei $p\,\%$ Zinsen im Jahr multiplizierst du das Kapital jedes Jahr mit dem Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$. Nach n Jahren ist das Kapital $K_n = K_0 \cdot q^n$. Die Zinsen vom Vorjahr werden mitverzinst. Bei einfachen Zinsen wird dagegen jedes Jahr nur auf das Anfangskapital gerechnet, das Wachstum ist linear. Je länger der Zeitraum, desto größer wird der Unterschied.

Beispiel 11: Kapital verdoppeln

Wann hat sich ein Kapital bei $6\,\%$ Zinsen verdoppelt?

$1{,}06^{11} \approx 1{,}898$, $1{,}06^{12} \approx 2{,}012$. Nach 12 Jahren ist das Kapital mehr als verdoppelt. Die Faustregel $\frac{72}{6} = 12$ trifft es genau.

Exponentialgleichungen durch Probieren

Willst du wissen, wann ein Wert eine bestimmte Grenze erreicht, musst du $q^n = Z$ nach n lösen. In Klasse 9 geht das durch systematisches Probieren mit dem Taschenrechner: Du berechnest q^n für verschiedene n und schließt die Lösung ein. Mit dem Logarithmus (Klasse 10) gilt genauer $n = \frac{\ln Z}{\ln q}$. Beim Probieren lohnt es sich, mit großen Schritten zu beginnen und dann zu verfeinern.

Beispiel 12: Grenzwert suchen

Ein Wert von 2000 nimmt jedes Jahr um $15\,\%$ ab. Wann ist er unter 500?

$2000 \cdot 0{,}85^n$ bedeutet $0{,}85^n$. $0{,}85^8 \approx 0{,}272$, $0{,}85^9 \approx 0{,}231$. Nach 9 Jahren ist der Wert unter 500.

Beschränktes Wachstum und Grenzen

Reines exponentielles Wachstum kann nicht ewig dauern. Bakterien brauchen Nahrung, Städte brauchen Platz, Epidemien enden, wenn immer weniger Menschen noch ansteckbar sind. In der Praxis verlangsamt sich das Wachstum irgendwann und nähert sich einer Grenze. Ein Modell mit konstantem Faktor ist daher nur für einen begrenzten Zeitraum brauchbar. Prüfe immer, ob das Ergebnis noch realistisch ist: Mehr Bakterien als Atome im Universum sind unmöglich.

Beispiel 13: Modell hinterfragen

Eine Hefekultur wächst täglich um $60\,\%$. Am Anfang sind es 1 g. Wie viel sind es nach 30 Tagen im Modell? Ist das realistisch?

$1{,}6^{30} \approx 1{,}3 \cdot 10^6$ g, also $1{,}3$ Tonnen. In einem Glas mit Nährlösung ist das unmöglich:

Die Nahrung reicht nicht. Das Modell gilt nur für die ersten Tage.

Wusstest du?

Die Reiskorn-Legende vom Schachbrett zeigt, wie schnell Verdopplungen wachsen. Bei der Corona-Pandemie 2020 hörte man oft das Wort »exponentiell«: Verdoppelte sich die Zahl der Fälle alle fünf Tage, waren es nach 30 Tagen schon 64-mal so viele. Auch die Kohlenstoffdatierung von Fossilien nutzt den exponentiellen Zerfall von Kohlenstoff-14 mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Lineares Wachstum: gleiche Zunahme pro Schritt (Addition), Funktionsterm $y = y_0 + m \cdot x$, der Graph ist eine Gerade.
- Exponentielles Wachstum oder Zerfall: gleicher Faktor pro Schritt (Multiplikation), Term $y = y_0 \cdot q^x$.
- Wachstumsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$ bei Zunahme, $q = 1 - \frac{p}{100}$ bei Abnahme; mehrere Änderungen werden multipliziert.
- Halbwertszeit: Zeit, in der sich eine Menge halbiert; Verdopplungszeit: Zeit, in der sie sich verdoppelt.
- Linear oder exponentiell erkennen: gleiche Differenzen oder gleiche Quotienten in der Wertetabelle.
- Anfangswert und Faktor aus zwei Werten bestimmen: $q = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}$.
- Exponentielles Wachstum überholt jedes lineare Wachstum irgendwann, wirkt am Anfang aber oft harmlos.
- Probieren mit dem Taschenrechner löst $q^n =$ Zielwert; der Logarithmus gibt die exakte Zeit.

Achtung

Aus $+5\,\%$ wird $q = 1{,}05$, nicht $0{,}05$. Bei Abnahme rechnest du $q = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$, nicht $-0{,}08$. Es heißt $N_0 \cdot q^t$, nicht $N_0 \cdot q \cdot t$. $1{,}05^{10}$ ist nicht $1{,}05 \cdot 10$. Prozente über mehrere Jahre addierst du nicht: $+10\,\%$ und $+10\,\%$ ergeben $+21\,\%$.

Zum Einstieg: Das Angebot des Königs

Ein König bietet dir zwei Belohnungen für einen Monat Arbeit an: Entweder bekommst du jeden Tag 100 €, oder du erhältst am ersten Tag 1 Cent und danach jeden Tag doppelt so viel wie am Vortag. Die meisten wählen sofort die 100 € pro Tag, also 3000 € in 30 Tagen. Rechnet man aber nach, bekommt man beim zweiten Angebot allein am 30. Tag 2^{29} Cent, das sind über 5 Millionen Euro. Dieses Rätsel zeigt, wie stark man exponentielles Wachstum unterschätzt.

Beispiel 14

Ein Fahrrad kostet neu 800 € und verliert jedes Jahr 15 % seines Wertes. Wie viel ist es nach 4 Jahren wert und wann ist es zum ersten Mal weniger als 300 € wert?

Bei einer Abnahme um 15 % bleiben jedes Jahr 85 % übrig, der Faktor ist also $q = 0{,}85$. Der Funktionsterm lautet $W(t) = 800 \cdot 0{,}85^t$. Nach 4 Jahren gilt $W(4) = 800 \cdot 0{,}85^4 \approx 417{,}60$ €. Für die zweite Frage probieren wir weiter: $W(6) \approx 301{,}72$ € und $W(7) \approx 256{,}46$ €. Antwort: Nach 4 Jahren ist das Fahrrad etwa 418 € wert, nach 7 Jahren erstmals weniger als 300 €.

Häufige Fehler

Prozentsätze dürfen bei mehreren Schritten nicht einfach addiert werden: Zweimal 10 % Zunahme ergeben 21 % und nicht 20 %. Achte auch darauf, ob ein Wert zunimmt (Faktor größer als 1) oder abnimmt (Faktor zwischen 0 und 1). Bei der Halbwertszeit zählt die Anzahl der Halbwertszeiten als Exponent, nicht die Zahl der Stunden.

Ottos Tipp

Frage dich bei jedem Sachverhalt: Wird jedes Mal *dasselbe addiert* oder *mit demselben Faktor multipliziert*? Daran erkennst du das Modell. Mit dem Taschenrechner nutzt du die Taste x^y. Prüfe mit einer Schätzung: Bei $q = 2$ verdoppelt sich der Wert in jedem Schritt.