Arbeitsblatt - Wachstum und Zerfall

Klasse: Klasse 9 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Linear oder exponentiell: Wertetabellen

Bei linearem Wachstum kommt in gleichen Zeiträumen immer dasselbe dazu (Addition). Bei exponentiellem Wachstum wird in gleichen Zeiträumen mit demselben Faktor multipliziert.

Woche	0	1	2	3	4
Pflanze (+3 cm pro Woche)	4	?	?	?	?
Bakterien (Faktor 2 pro Woche, in 1000)	4	?	?	?	?

a) Ergänze beide Zeilen der Tabelle.
b) Welche Zeile wächst linear, welche exponentiell?
c) Nach wie vielen Wochen überholen die Bakterien die Pflanze (Zahlenwerte vergleichen)?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Wachstumsfaktor und Prozentsatz

Bei einer Zunahme um $p\,\%$ ist der Wachstumsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$, bei einer Abnahme $q = 1 - \frac{p}{100}$.

Änderung	Faktor q
$+5\,\%$	?
$-12\,\%$	?
$+100\,\%$	?
$-50\,\%$	?
$+0{,}5\,\%$	?

a) Ergänze die Faktoren.
b) Gib die prozentuale Änderung für $q = 1{,}08$, $q = 0{,}95$ und $q = 1{,}5$ an.
c) Welcher Faktor entspricht zwei Änderungen: erst $+10\,\%$, dann $+20\,\%$? Ist das $+30\,\%$?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Das Sparbuch

Du legst 400 € auf einem Sparbuch an. Die Bank zahlt $3\,\%$ Zinsen pro Jahr, die Zinsen werden mitverzinst.

Jahr	1	2	5	10
Guthaben	?	?	?	?

a) Berechne das Guthaben nach 1, 2, 5 und 10 Jahren.
b) Wie lautet der Funktionsterm $K(t)$?
c) Wie viel Zinsen hast du nach 10 Jahren insgesamt bekommen?
d) Wie viel wäre es bei einfacher Verzinsung (jedes Jahr nur 12 € Zinsen)?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Zerfall

Ein Wirkstoff wird im Körper jede Stunde um $10\,\%$ abgebaut. Zu Beginn sind 80 mg im Blut.

Stunde	1	2	3	6
Menge in mg	?	?	?	?

a) Berechne die Menge nach 1, 2, 3 und 6 Stunden.
b) Gib den Funktionsterm an.
c) Wie viel Prozent der Anfangsmenge sind nach 6 Stunden noch da?
d) Nach wie vielen ganzen Stunden ist weniger als die Hälfte vorhanden?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Funktionsterme aufstellen

Ein exponentieller Vorgang hat den Term $N(t) = N_0 \cdot q^t$ mit dem Anfangswert N_0 und dem Faktor q.

a) Anfangswert 250, Zunahme $20\,\%$ pro Zeitschritt. Stelle den Term auf und berechne $N(4)$.
b) Anfangswert 1000, Abnahme $8\,\%$ pro Zeitschritt. Term und $N(5)$.
c) Ein Wert steigt von 40 auf $64{,}8$ in 2 Schritten. Bestimme q.
d) Ein Wert fällt von 500 auf 405 in einem Schritt. Wie hoch ist die Abnahme?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Linear oder exponentiell?

Prüfe jede Tabelle: Sind die Differenzen gleich (linear) oder die Quotienten gleich (exponentiell)?

Tabelle	$x = 0$	1	2	3
A	5	8	11	14
B	5	10	20	40
C	100	90	81	72,9
D	100	90	80	70

a) Entscheide für jede Tabelle und gib die Funktionsgleichung an.

b) Berechne in Tabelle B den Wert für $x = 6$.
c) Berechne in Tabelle D, wann der Wert null erreicht.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Das Sparbuch mit Verdopplung

Ein Sparbuch hat einen Zinssatz von $2{,}4\,\%$ pro Jahr. Du zahlst 2500 € ein.

a) Berechne das Guthaben nach 5 Jahren.
b) Wie viel Zinsen sind das?
c) Nach wie vielen Jahren hat sich das Guthaben ungefähr verdoppelt? Probiere mit dem Taschenrechner.
d) Wie hoch ist das Guthaben nach 20 Jahren?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Akku

Ein Handy-Akku verliert durch Alterung jedes Jahr $8\,\%$ seiner Kapazität.

a) Wie viel Prozent der Anfangskapazität sind nach 1, 3 und 5 Jahren noch da?
b) Nach wie vielen Jahren sind es weniger als $50\,\%$?
c) Der neue Akku hat 4500 mAh. Wie viel mAh sind nach 4 Jahren übrig?
d) Wie viel Prozent hat er insgesamt nach 4 Jahren verloren?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Einwohnerzahl

Eine Stadt hat $120\,000$ Einwohner und wächst jedes Jahr um $1{,}5\,\%$.

Jahre	5	10	15	20
Einwohner	?	?	?	?

a) Berechne die Einwohnerzahl nach 5, 10, 15 und 20 Jahren (auf Hunderter gerundet).
b) Wann hat die Stadt mehr als $150\,000$ Einwohner?
c) Wie viele Einwohner kommen im $20.$ Jahr dazu?
d) Wie hoch wäre die Einwohnerzahl bei linearem Wachstum mit $+1800$ pro Jahr nach 20 Jahren?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das Medikament

Der Wirkstoff eines Medikaments hat eine Halbwertszeit von 6 Stunden. Du nimmst 400 mg.

Zeit	0 h	6 h	12 h	18 h
Menge	400 mg	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Wie viel mg sind nach 9 Stunden noch da? (Rechne mit $400 \cdot 0{,}5^{t/6}$.)
c) Bestimme den Stundenfaktor $q = 0{,}5^{1/6}$.
d) Wann sind weniger als 10 mg im Blut? Probiere mit $0{,}5^{n}$ für ganze Halbwertszeiten.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Radioaktives Jod

Das Isotop Jod-131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Eine Probe enthält 80 g.

Tage	0	8	16	24	32
Menge in g	80	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Wie viel Gramm sind nach 20 Tagen übrig?
c) Berechne den Tagesfaktor und gib die tägliche Abnahme in Prozent an.
d) Nach wie vielen Tagen ist weniger als 1 g vorhanden?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Schimmel auf dem Brot

Auf einer Brotscheibe ($100\,\text{cm}^2$) wächst Schimmel. Am Anfang bedeckt er $2\,\text{cm}^2$, die Fläche verdoppelt sich jeden Tag.

Tag	0	1	2	3	4	5
Fläche in cm²	2	?	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) An welchem Tag ist die Scheibe vollständig bedeckt (mehr als $100\,\text{cm}^2$)?
c) Welche Fläche hat der Schimmel am Tag 4, und wie viel Prozent der Scheibe sind das?
d) Am Tag 5 sind $64\,\text{cm}^2$ bedeckt. Wie viel ist es einen Tag davor, wie viel einen Tag danach?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Das virale Video

Ein Video wird am ersten Tag 500-mal angeschaut, danach wächst die Zahl der täglichen Aufrufe um $40\,\%$ pro Tag. Ein zweites Video startet ebenfalls mit 500 und gewinnt jeden Tag 900 Aufrufe hinzu.

Tag	1	2	3	4	5
Video 1 ($\cdot 1{,}4$)	500	?	?	?	?
Video 2 ($+900$)	500	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle auf ganze Zahlen.
b) Welches Video hat am Tag 6 mehr Aufrufe?

c) Ab welchem Tag überholt das exponentielle Video dauerhaft das lineare? (Probiere die Tage 8 bis 10.)
d) Gib beide Funktionsterme an (n Tage nach dem ersten Tag).

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Die Seerose

Die Fläche einer Seerose auf einem Teich verdoppelt sich alle 3 Tage. Nach 30 Tagen ist der Teich vollständig bedeckt.

a) An welchem Tag war der Teich zur Hälfte bedeckt?
b) Wie viel Prozent der Fläche waren es nach 24 Tagen?
c) Wann waren $12{,}5\,\%$ bedeckt?
d) Warum merkt man die Gefahr bei exponentiellem Wachstum erst spät?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der Wertverlust des Autos

Ein Neuwagen kostet $28\,000$ €. Im ersten Jahr verliert er $15\,\%$ an Wert, danach jedes Jahr $10\,\%$ vom Wert des Vorjahres.

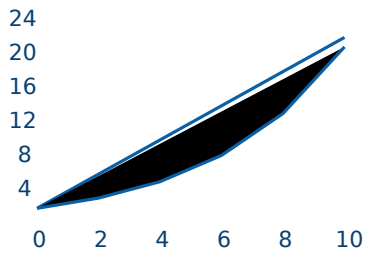
Jahr	1	2	3	4
Wert in €	?	?	?	?

a) Berechne den Wert nach 1 bis 4 Jahren.
b) Wie viel Prozent des Neupreises sind nach 4 Jahren noch da?
c) Nach wie vielen Jahren sinkt der Wert unter $10\,000$ €?
d) Nach 4 Jahren verkauft Herr Ali das Auto für $18\,000$ €. Ist das über oder unter dem Modellwert?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Zwei Städte im Vergleich

Stadt A hat $50\,000$ Einwohner und wächst um 1200 pro Jahr. Stadt B hat $40\,000$ Einwohner und wächst um $2{,}5\,\%$ pro Jahr.



a) Stelle die Funktionsterme $A(t)$ und $B(t)$ auf.
b) Berechne beide Einwohnerzahlen nach 10, 20 und 30 Jahren.
c) Ab welchem Jahr hat B mehr Einwohner als A?

d) Beschreibe in einem Satz den Unterschied der beiden Entwicklungen.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Koffein im Blut

Koffein hat eine Halbwertszeit von etwa 5 Stunden. Eine Tasse Kaffee enthält 80 mg Koffein, die sofort aufgenommen werden. Ben trinkt um 8 Uhr und um 13 Uhr je eine Tasse.

Zeit	Wirkung
8 Uhr	80 mg
13 Uhr	+80 mg

a) Wie viel Koffein von der ersten Tasse ist um 13 Uhr noch da?
b) Wie viel Koffein ist unmittelbar nach der zweiten Tasse im Blut?
c) Wie viel ist um 18 Uhr noch da (beide Tassen)?
d) Wie viel Koffein ist um 23 Uhr noch vorhanden? Ben möchte einschlafen.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die Ausbreitung

Bei einer Infektionswelle verdoppeln sich die Fälle alle 4 Tage. Am Anfang gibt es 8 Fälle.

a) Wie viele Fälle gibt es nach 8, 16 und 28 Tagen?
b) Bestimme den Tagesfaktor $q = 2^{1/4}$ und die tägliche Zunahme in Prozent.
c) Nach wie vielen Tagen gibt es mehr als 1000 Fälle?
d) Durch Maßnahmen halbiert sich die Zahl der Fälle alle 6 Tage. Von 1024 Fällen aus: Nach wie vielen Tagen sind es weniger als 10?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Zinseszins oder einfache Zinsen?

Zwei Banken bieten für 5000 € an. Bank A: $2\,\%$ Zinsen pro Jahr mit Zinseszins. Bank B: jedes Jahr 100 € Zinsen, die nicht mitverzinst werden.

Jahre	10	20	40
Bank A	?	?	?
Bank B	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Nach wie vielen Jahren ist Bank A besser? Begründe.
c) Wie viel Jahre braucht A, um $10\,000$ € zu erreichen (Probieren)?
d) Welche Zinsrate müsste B bei einfacher Verzinsung zahlen, um nach 20 Jahren so viel wie A zu haben?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Die Verdopplungszeit

Die Zeit, in der sich ein Wert bei konstantem Wachstumsfaktor q verdoppelt, nennt man Verdopplungszeit. Es gilt $q^n = 2$, also $n = \frac{\ln 2}{\ln q}$. Als Faustregel gilt $n \approx \frac{72}{p}$ bei $p\,\%$ Wachstum.

a) Bestimme mit Probieren die Verdopplungszeit für $q = 1{,}07$ (zwei ganze Jahre genügen: $1{,}07^{10}$, $1{,}07^{11}$).
b) Berechne mit der Formel die Verdopplungszeit für $3\,\%$, $5\,\%$ und $7\,\%$ Wachstum.
c) Vergleiche mit der Faustregel $\frac{72}{p}$.
d) Berechne die Halbwertszeit für $q = 0{,}9$ (also $10\,\%$ Abnahme pro Zeitschritt).