Lösungen - Wachstum und Zerfall

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

a) Pflanze: $4, 7, 10, 13, 16$. Bakterien: $4, 8, 16, 32, 64$. Bei der Pflanze addiert man jede Woche 3 cm, bei den Bakterien verdoppelt man jede Woche.
b) Die Pflanze wächst linear (immer $+3$), die Bakterien exponentiell (immer $\cdot 2$). Man prüft die Differenzen (immer 3) und die Quotienten (immer 2) aufeinanderfolgender Werte.
c) Woche 1: 7 gegen 8: Die Bakterien sind schon nach 1 Woche größer. Exponentielles Wachstum überholt lineares Wachstum früher oder später immer.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $q = 1{,}05$; $0{,}88$; 2; $0{,}5$; $1{,}005$. Bei einer Zunahme addiert man den Prozentsatz als Dezimalzahl zu 1, bei einer Abnahme subtrahiert man ihn von 1.
b) $q = 1{,}08$: $+8\,\%$; $q = 0{,}95$: $-5\,\%$; $q = 1{,}5$: $+50\,\%$. Umgekehrt liest man den Prozentsatz am Abstand des Faktors von 1 ab.
c) $1{,}1 \cdot 1{,}2 = 1{,}32$, das sind $+32\,\%$, nicht $+30\,\%$. Zwei Änderungen nacheinander werden durch Multiplikation der Faktoren verknüpft, nicht durch Addition der Prozentsätze.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $400 \cdot 1{,}03 = 412{,}00$ €; $400 \cdot 1{,}03^2 = 424{,}36$ €; $1{,}03^5$: $463{,}71$ €; $1{,}03^{10}$: $537{,}57$ €. Jedes Jahr wird das Guthaben mit dem Faktor 1,03 multipliziert; nach t Jahren also mit $1{,}03^t$.
b) $K(t) = 400 \cdot 1{,}03^t$ (mit t in Jahren). Anfangswert 400 €, Wachstumsfaktor 1,03.
c) $537{,}57 - 400 = 137{,}57$ €. Die Zinsen sind die Differenz zwischen Endguthaben und Anfangsbetrag.
d) $10 \cdot 12 = 120$ €, also nur 520 €. Der Zinseszins bringt $17{,}57$ € mehr. Ohne Zinseszins gäbe es jedes Jahr nur $400 \cdot 0{,}03 = 12$ € Zinsen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $80 \cdot 0{,}9 = 72{,}0$; $80 \cdot 0{,}9^2 = 64{,}80$; $80 \cdot 0{,}9^3 = 58{,}32$; $80 \cdot 0{,}9^6 = 42{,}52$ (in mg). Bei 10 % Abnahme bleibt jede Stunde der Faktor 0,9 übrig.
b) $m(t) = 80 \cdot 0{,}9^t$. Anfangswert 80 mg, Abnahmefaktor 0,9.
c) $0{,}9^6 \approx 0{,}531$, also etwa $53\,\%$. Man teilt die Restmenge durch die Anfangsmenge.
d) $0{,}9^6 = 0{,}531$, $0{,}9^7 = 0{,}478$: nach 7 Stunden. Man probiert ganze Stunden, bis der Faktor unter 0,5 liegt. Antwort: Nach 7 Stunden ist weniger als die Hälfte übrig.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $N(t) = 250 \cdot 1{,}2^t$; $N(4) = 250 \cdot 2{,}0736 = 518{,}40$. Zunahme um 20 % bedeutet $q = 1{,}2$.

b) $N(t) = 1000 \cdot 0{,}92^t$; $N(5) = 659{,}08$. Abnahme um 8 % bedeutet $q = 0{,}92$.
c) $q^2 = \frac{64{,}8}{40} = 1{,}62$, $q = \sqrt{1{,}62} \approx 1{,}273$, also etwa $+27{,}3\,\%$. In zwei Zeitschritten wird mit q^2 multipliziert; man teilt End- durch Anfangswert und zieht die Wurzel.
d) $q = \frac{405}{500} = 0{,}81$, also $-19\,\%$. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Werte ist der Faktor; $1 - 0{,}81 = 0{,}19$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) A: Differenz $+3$: linear, $y = 5 + 3x$. B: Quotient 2: exponentiell, $y = 5 \cdot 2^x$. C: Quotient $0{,}9$: exponentiell, $y = 100 \cdot 0{,}9^x$. D: Differenz -10: linear, $y = 100 - 10x$. Bei linearen Tabellen ist die Differenz die Steigung, bei exponentiellen ist der Quotient der Faktor; der Wert bei $x = 0$ ist der Anfangswert.
b) $5 \cdot 2^6 = 320$. Man setzt $x = 6$ in den Term von Tabelle B ein.
c) $100 - 10x = 0$, $x = 10$. (Bei C wird der Wert nie null.) Bei der linearen Abnahme wird irgendwann null erreicht, bei der exponentiellen Abnahme nie, weil immer ein Anteil übrig bleibt.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $2500 \cdot 1{,}024^5 \approx 2814{,}75$ €. Wachstumsfaktor 1,024; Anfangswert 2500 €.
b) $K_5 - 2500 \approx 314{,}75$ €. Die Zinsen sind Endwert minus Anfangswert.
c) $1{,}024^{29} \approx 1{,}989$ (knapp unter 2), $1{,}024^{30} \approx 2{,}037$. Nach etwa 30 Jahren. Man probiert, bis $1{,}024^n$ den Wert 2 erreicht. Die Faustregel $72 : 2{,}4 = 30$ bestätigt das Ergebnis.
d) $2500 \cdot 1{,}024^{20} \approx 4017{,}35$ €. Antwort: Nach 20 Jahren sind es etwa 4017 €.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $92\,\%$; $0{,}92^3 \approx 77{,}9\,\%$; $0{,}92^5 \approx 65{,}9\,\%$. Jedes Jahr bleibt der Faktor 0,92; man rechnet die Potenzen in Prozent um.
b) $0{,}92^8 \approx 0{,}513$, $0{,}92^9 \approx 0{,}472$: nach 9 Jahren. Man probiert ganze Jahre, bis der Faktor unter 0,5 liegt.
c) $4500 \cdot 0{,}92^4 \approx 3224$ mAh. Man multipliziert die Anfangskapazität mit $0{,}92^4$.
d) $1 - 0{,}7164 = 0{,}2836$, also etwa $28{,}4\,\%$ (nicht $4 \cdot 8 = 32\,\%$). Der Verlust in vier Jahren ist $1 - 0{,}92^4$; er ist kleiner als $4 \cdot 8\,\%$, weil sich der Verlust jedes Jahr auf einen kleineren Wert bezieht.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $120\,000 \cdot 1{,}015^5 \approx 129\,300$; 10: $139\,300$; 15: $150\,000$; 20: $161\,600$. Man multipliziert die Einwohnerzahl mit $1{,}015^t$ und rundet auf Hunderter.
b) $1{,}015^{15} = 1{,}2502$ ($\geq 1{,}25$), $1{,}015^{14} = 1{,}2318$: im $15.$ Jahr (nach 15 Jahren). Die Stadt ist um 25 % gewachsen, wenn der Faktor $1{,}25$ erreicht ist.
c) $N(20) - N(19) = 2389$. Der Zuwachs im 20. Jahr ist die Differenz der Werte nach 20 und nach 19 Jahren.
d) $120\,000 + 20 \cdot 1800 = 156\,000$; exponentiell: $161\,600$. Exponentiell wächst später

mehr. Beim linearen Modell kommen jedes Jahr gleich viele hinzu (1,5 % von 120000 = 1800).

Lösung zu Aufgabe 10

a) 200; 100; 50 (mg). Nach jeder Halbwertszeit (6 h) halbiert sich die Menge.
b) $400 \cdot 0{,}5^{1{,}5} \approx 141{,}4$ mg. 9 Stunden sind 1,5 Halbwertszeiten, deshalb rechnet man mit $0{,}5^{1{,}5}$.
c) $q = 0{,}5^{1/6} \approx 0{,}8909$, also etwa $-10{,}9\,\%$ pro Stunde. Der Stundenfaktor ist die sechste Wurzel aus 0,5; $1 - 0{,}8909 \approx 0{,}109$.
d) Nach 5 Halbwertszeiten (30 h): $400 \cdot 0{,}5^5 = 12{,}5$ mg; nach 6 (36 h): $6{,}25$ mg. Also zwischen 30 h und 36 h; genau: $6 \cdot \frac{\ln 40}{\ln 2} \approx 31{,}9$ h. Man probiert ganze Halbwertszeiten und grenzt das Ergebnis ein.

Lösung zu Aufgabe 11

a) 40, 20, 10, 5 (g). Alle 8 Tage halbiert sich die Menge.
b) $80 \cdot 0{,}5^{2{,}5} \approx 14{,}14$ g. 20 Tage sind 2,5 Halbwertszeiten.
c) $q = 0{,}5^{1/8} \approx 0{,}9170$, also etwa $-8{,}3\,\%$ pro Tag. Der Tagesfaktor ist die achte Wurzel aus 0,5.
d) $80 \cdot 0{,}5^n$ für $n = 7$ ($0{,}625$ g): nach 56 Tagen. ($n = 6$: $1{,}25$ g) Man halbiert so lange, bis weniger als 1 g übrig ist; das sind 7 Halbwertszeiten.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $2, 4, 8, 16, 32, 64$. Jeden Tag verdoppelt sich die Fläche.
b) Tag 5: 64, Tag 6: $128 > 100$. Am $6.$ Tag. Am 6. Tag würde die Fläche die ganze Scheibe übersteigen; die Scheibe ist also am 6. Tag vollständig bedeckt.
c) $32\,\text{cm}^2$, also $32\,\%$. Man teilt die Schimmelfläche durch die Brotfläche von 100 cm².
d) Davor $32\,\text{cm}^2$ (die Hälfte), danach $128\,\text{cm}^2$ (das Doppelte). Beim exponentiellen Wachstum ist die Fläche einen Tag vorher immer halb so groß und einen Tag später doppelt so groß.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Video 1: $500, 700, 980, 1372, 1921$ (gerundet). Video 2: $500, 1400, 2300, 3200, 4100$. Video 1 wird jeden Tag mit 1,4 multipliziert, Video 2 bekommt jeden Tag 900 Aufrufe dazu.
b) Video 1 hat nach 5 Tagen $500 \cdot 1{,}4^5 \approx 2689$; Video 2 hat $500 + 5 \cdot 900 = 5000$. Das lineare Video liegt vorn. Anfangs ist das lineare Wachstum mit großen Zuwächsen schneller.
c) $n = 8$: $500 \cdot 1{,}4^8 \approx 7379$ gegen $500 + 7200 = 7700$; $n = 9$: $500 \cdot 1{,}4^9 \approx 10\,331$ gegen 8600. Ab dem $10.$ Tag ($n = 9$) liegt das exponentielle Video vorn. Man vergleicht Tag für Tag, bis das exponentielle Video vorne liegt.
d) $f_1(n) = 500 \cdot 1{,}4^n$ und $f_2(n) = 500 + 900n$. Hier zählt n die Tage nach dem ersten Tag.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Einen Verdopplungsschritt vorher: nach 27 Tagen. Wenn der Teich am Tag 30 voll ist, war er drei Tage vorher, also vor einer Verdopplung, halb voll.
b) Bis zum Tag 30 fehlen $30 - 24 = 6$ Tage, das sind 2 Verdopplungsschritte; also waren es $\frac{1}{4} = 25\,\%$. Rückwärts wird bei jedem Schritt halbiert: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
c) $12{,}5\,\% = \frac{1}{8}$: 3 Schritte vor 30, also nach 21 Tagen. Drei Halbierungen ergeben ein Achtel.
d) In den ersten Wochen sieht man kaum etwas; die letzten Verdopplungen füllen den Teich schlagartig. Menschen schätzen exponentielles Wachstum meist zu niedrig ein. Das ist ein typisches Merkmal exponentiellen Wachstums.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $28\,000 \cdot 0{,}85 = 23\,800$; $\cdot 0{,}9 = 21\,420$; $\cdot 0{,}9 = 19\,278$; $\cdot 0{,}9 = 17\,350$ (€). Im ersten Jahr ist der Faktor 0,85, danach jeweils 0,9.
b) $\frac{17350}{28000} \approx 62{,}0\,\%$. Man teilt den Wert nach 4 Jahren durch den Neupreis.
c) $23\,800 \cdot 0{,}9^n$: $n = 8$: $10\,245$; $n = 9$: 9221. Also nach $1 + 9 = 10$ Jahren. Man rechnet ab dem Wert nach einem Jahr weiter und probiert ganze Jahre; zum Schluss addiert man das erste Jahr.
d) Der Modellwert ist etwa $17\,350$ €. Mit $18\,000$ € liegt der Preis etwa 650 € darüber. Der Händler verlangt also etwas mehr als den rechnerischen Wert.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $A(t) = 50\,000 + 1200\,t$; $B(t) = 40\,000 \cdot 1{,}025^t$. Stadt A wächst linear (Addition), Stadt B exponentiell (Faktor 1,025).
b) $t = 10$: $A = 62\,000$, $B = 51\,203$; $t = 20$: $A = 74\,000$, $B = 65\,545$; $t = 30$: $A = 86\,000$, $B = 83\,903$. Man setzt die Jahre in beide Terme ein.
c) $t = 32$: $A = 88\,400$, $B = 88\,150$; $t = 33$: $A = 89\,600$, $B = 90\,354$. Ab dem Jahr 33 ist B größer. Man probiert Jahre in der Nähe von 30, bis B größer ist als A.
d) A wächst jedes Jahr gleich stark, B wächst anfangs langsamer, aber sein Zuwachs steigt jedes Jahr, sodass B A irgendwann überholt. Der Zuwachs von B wächst, weil 2,5 % von einer immer größeren Zahl berechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $80 \cdot 0{,}5 = 40$ mg. Nach 5 Stunden, also einer Halbwertszeit, ist die Hälfte abgebaut.
b) $40 + 80 = 120$ mg. Um 13 Uhr kommt die zweite Tasse zu den restlichen 40 mg hinzu.
c) Erste Tasse: $80 \cdot 0{,}5^2 = 20$ mg; zweite: $80 \cdot 0{,}5 = 40$ mg; zusammen 60 mg. Um 18 Uhr ist die erste Tasse zwei Halbwertszeiten alt, die zweite eine.
d) Erste: $80 \cdot 0{,}5^3 = 10$ mg; zweite: $80 \cdot 0{,}5^2 = 20$ mg; zusammen 30 mg. Das ist noch ein Viertel der Spitzenmenge. Um 23 Uhr ist noch so viel Koffein im Blut, wie eine halbe Tasse liefert.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $8 \cdot 2^2 = 32$; $8 \cdot 2^4 = 128$; $8 \cdot 2^7 = 1024$. Alle 4 Tage verdoppelt sich die Fallzahl; nach 28 Tagen sind es 7 Verdopplungen.
b) $q = 2^{0{,}25} \approx 1{,}1892$, also etwa $+18{,}9\,\%$ pro Tag. Der Tagesfaktor ist die vierte Wurzel aus 2.
c) $8 \cdot 2^n > 1000$, $2^n > 125$: $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, also $n = 7$ Verdopplungen, also nach 28 Tagen. Man probiert Zweierpotenzen, bis 2^n über 125 liegt.
d) $1024 \cdot 0{,}5^n$: $0{,}5^n$, $n = 7$ ($\frac{1024}{128} = 8$): nach $7 \cdot 6 = 42$ Tagen. Man halbiert so lange, bis weniger als 10 Fälle übrig sind.

Lösung zu Aufgabe 19

a) A: $5000 \cdot 1{,}02^{10} = 6094{,}97$; 20: $7429{,}74$; 40: $11\,040{,}20$. B: 6000; 7000; 9000. Bank A rechnet mit Zinseszins ($1{,}02^t$), Bank B addiert jedes Jahr 100 €.
b) Ab dem ersten Jahr sind es mit A 5100 gegen 5100 (gleich), ab dem zweiten Jahr liegt A vorn (5202 gegen 5200). Im ersten Jahr sind beide gleich, danach bringen die Zinseszinsen bei A einen Vorsprung.
c) $1{,}02^{35} = 2{,}000$, $1{,}02^{36} = 2{,}040$: nach 36 Jahren. Verdopplung bedeutet $1{,}02^n \geq 2$. Die Faustregel liefert $72 : 2 = 36$ Jahre.
d) A bringt $2429{,}74$ € in 20 Jahren; $\frac{2429{,}74}{20} \approx 121{,}49$ € pro Jahr, also etwa $2{,}43\,\%$ von 5000 €. Der durchschnittliche jährliche Ertrag von A liegt über dem Zinssatz, weil auch die Zinsen verzinst werden.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $1{,}07^{10} \approx 1{,}967$, $1{,}07^{11} \approx 2{,}105$: zwischen 10 und 11 Jahren. Man probiert Jahre, bis der Faktor 2 übersteigt.
b) $3\,\%$: $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$; $5\,\%$: $\approx 14{,}2$; $7\,\%$: $\approx 10{,}2$ Jahre. Man setzt in die Formel mit dem Logarithmus ein.
c) $\frac{72}{3} = 24$; $\frac{72}{5} = 14{,}4$; $\frac{72}{7} \approx 10{,}3$. Die Faustregel liegt sehr nah. Die Faustregel liefert fast dieselben Werte wie die genaue Formel.
d) $0{,}9^n = 0{,}5$: $n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}6$ Schritte (Probe: $0{,}9^6 = 0{,}531$, $0{,}9^7 = 0{,}478$). Hier geht es um die Halbwertszeit: Man setzt $q^n = 0{,}5$.