Lösungen zur Klassenarbeit - Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Bezogen auf α ist die kürzere Kathete 5 cm die Gegenkathete, 12 cm die Ankathete und 13 cm die Hypotenuse (1 P. für die richtige Zuordnung). Damit:
$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{5}{13} \approx 0{,}385$, $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$,
$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$ (2 P.).
b) Mit der Umkehrfunktion: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 22{,}62^\circ$ (1 P.). Kontrolle mit dem Sinus: $\sin^{-1}(0{,}385) \approx 22{,}6^\circ$, derselbe Winkel. Der zweite spitze Winkel misst dann $67{,}38^\circ$. Wer Gegenkathete und Ankathete vertauscht, erhält fälschlich diesen größeren Winkel; deshalb lohnt sich vorher eine Skizze mit markiertem α. Antwort: $\alpha \approx 22{,}62^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Gesucht sind beide Katheten bei bekannter Hypotenuse. Die Seite a liegt α gegenüber, deshalb verwendet man den Sinus: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, umgestellt
$a = c \cdot \sin\alpha = 15 \cdot \sin 40^\circ \approx 15 \cdot 0{,}643 \approx 9{,}64$ cm (2 P.). Die Seite b liegt an α an, also hilft der Kosinus: $b = c \cdot \cos\alpha = 15 \cdot \cos 40^\circ \approx 15 \cdot 0{,}766 \approx 11{,}49$ cm (2 P.). Kontrolle mit Pythagoras: $9{,}64^2 + 11{,}49^2 \approx 92{,}9 + 132{,}0 = 224{,}9 \approx 225 = 15^2$. Der Taschenrechner muss auf Grad (DEG) eingestellt sein, sonst entstehen falsche Werte. Antwort: $a \approx 9{,}64$ cm und $b \approx 11{,}49$ cm.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Gegeben sind nur die beiden Katheten, daher passt der Tangens. Für den Winkel α gegenüber der Seite 9 cm gilt $\tan\alpha = \frac{9}{12} = 0{,}75$, also $\alpha = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}87^\circ$ (2 P.). Die Innenwinkelsumme beträgt 180°, der rechte Winkel zählt 90°; deshalb $\beta = 90^\circ - 36{,}87^\circ = 53{,}13^\circ$ (1 P.).

b) Die Hypotenuse folgt aus dem Satz des Pythagoras: $c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ cm (1 P.). Alternativ: $c = \frac{9}{\sin 36{,}87^\circ} \approx \frac{9}{0{,}6} = 15$ cm. Antwort: $\alpha \approx 36{,}87^\circ$, $\beta \approx 53{,}13^\circ$, $c = 15$ cm.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Die Sichtlinie beginnt in Augenhöhe. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Entfernung 25 m die Ankathete und der Höhenteil x über Augenhöhe die Gegenkathete:
$x = 25 \cdot \tan 32^\circ \approx 25 \cdot 0{,}625 \approx 15{,}62$ m. Dazu kommt die Augenhöhe:
$15{,}62 + 1{,}65 = 17{,}27$ m (2 P.).
b) Aus 15 m Entfernung bleibt der Höhenteil $15{,}62$ m gleich: $\tan\alpha = \frac{15{,}62}{15} \approx 1{,}041$, also

$\alpha \approx 46{,}2^\circ$ (2 P.). Näher am Baum ist der Winkel größer.
c) Die Sichtlinie ist die Hypotenuse: $\cos 32^\circ = \frac{25}{l}$, also $l = \frac{25}{\cos 32^\circ} \approx 29{,}48$ m (1 P.).
Antwort: Baum etwa $17{,}3$ m hoch, Winkel etwa $46{,}2^\circ$, Sichtlinie etwa $29{,}5$ m.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Eine Steigung von $8\,\%$ bedeutet: Auf 100 m waagerechter Strecke steigt die Straße um 8 m. Das Verhältnis Höhe zu waagerechter Strecke ist der Tangens des Steigungswinkels: $\tan\alpha = \frac{8}{100} = 0{,}08$ (1 P.). Mit der Umkehrfunktion folgt $\alpha = \tan^{-1}(0{,}08) \approx 4{,}57^\circ$ (1 P.). Der Winkel ist viel kleiner, als die Prozentzahl vermuten lässt; $100\,\%$ entsprächen erst 45°.
b) Die waagerechte Strecke beträgt $2{,}5$ km $= 2500$ m. Höhenunterschied: $h = 0{,}08 \cdot 2500 = 200$ m (1 P.). Antwort: Der Steigungswinkel beträgt etwa $4{,}57^\circ$; man überwindet 200 Höhenmeter.