Lernzettel - Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

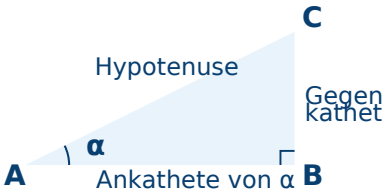
Klasse: Klasse 9

Mit dem Satz des Pythagoras berechnest du Seiten aus Seiten. Mit der Trigonometrie rechnest du in einem rechtwinkligen Dreieck auch mit Winkeln. Das brauchst du bei Dachneigungen, Steigungen, Höhenmessungen und im Vermessungswesen.

Einstieg: Wie hoch ist der Turm der Kirche?

Du stehst 40 m vor dem Turm der Stadtkirche und blickst zur Spitze. Dein Blick bildet mit dem Boden einen Winkel von 52°. Wie hoch ist der Turm? Messen kannst du die Höhe nicht, aber du kannst den Winkel messen. Alle rechtwinkligen Dreiecke mit demselben Winkel sind ähnlich, ihre Seitenverhältnisse sind also gleich. Dieses Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete heißt Tangens. Ein Blick in die Tabelle oder auf den Taschenrechner liefert $\tan 52^\circ \approx 1{,}28$, also ist der Turm $40 \cdot 1{,}28 \approx 51$ m hoch (plus Augenhöhe). So messen Landvermesser, Förster und Piloten Höhen und Entfernungen. In diesem Kapitel lernst du Sinus, Kosinus und Tangens kennen und wendest sie auf Dächer, Rampen, Leitern und Berge an.

Die Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck



Definition: Gegenkathete und Ankathete

Der rechte Winkel liegt bei C, die längste Seite c ist die **Hypotenuse**. Für einen spitzen Winkel α ist die **Gegenkathete** die Kathete, die α gegenüberliegt, und die **Ankathete** die Kathete, die an α anliegt. Für β vertauschen sich die Rollen.

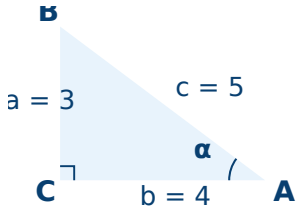
Sinus, Kosinus, Tangens

Satz: Sinus, Kosinus, Tangens

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Merke: Nur vom Winkel abhängig

Diese Verhältnisse hängen nur vom Winkel ab, nicht von der Größe des Dreiecks, weil alle rechtwinkligen Dreiecke mit gleichem Winkel ähnlich sind. Eselsbrücke: **GAGA-HAHA** oder SOH-CAH-TOA.



Beispiel 1: Das 3-4-5-Dreieck

Im Dreieck mit $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ ist α der Winkel bei A (gegenüber a). Berechne die drei Verhältnisse und α.

$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$, $\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Mit $\sin^{-1}(0{,}6)$ erhältst du $\alpha \approx 36{,}87^\circ$.

Taschenrechner und besondere Werte

Merke: Taschenrechner

Stelle den Rechner auf **DEG** (Gradmaß). Dann ist $\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\cos 60^\circ = 0{,}5$, $\tan 45^\circ = 1$. Für die Umkehrung nutzt du $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$: $\cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \alpha \approx 36{,}87^\circ$, $\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}43^\circ$.

Satz: Beziehungen

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$. Aus $\sin\alpha = 0{,}6$ folgt $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$ für spitzes α.

Regel: Besondere Winkel

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Seiten und Winkel berechnen

So gehst du vor: Seite oder Winkel berechnen

1. Zeichne eine Skizze, markiere α und beschrifte Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse.
2. Kreise ein, welche zwei Seiten in der Aufgabe vorkommen.
3. Wähle die Funktion: Gegen und Hypotenuse bedeuten Sinus, An und Hypotenuse Kosinus, Gegen und An Tangens.
4. Stelle um und rechne im Gradmaß (DEG). Für einen Winkel nutzt du die Umkehrfunktion.
5. Prüfe mit dem Satz des Pythagoras oder mit $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Beispiel 2: Seiten aus Hypotenuse

Es ist $c = 10$ cm und $\alpha = 30^\circ$. Berechne a und b.

Gegenkathete: $a = c \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ cm.

Ankathete: $b = c \cdot \cos\alpha = 10 \cdot 0{,}866 \approx 8{,}66$ cm.

Beispiel 3: Seiten aus Kathete

Es ist $b = 8$ cm und $\alpha = 40^\circ$. Berechne a und c.

$a = b \cdot \tan\alpha = 8 \cdot \tan 40^\circ \approx 6{,}71$ cm.

$$c = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{8}{\cos 40^\circ} \approx 10{,}44 \text{ cm}.$$

Beispiel 4: Winkel berechnen

Es ist $a = 5$ und $b = 12$. Berechne α und β.

$\tan\alpha = \frac{5}{12}$, also $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 22{,}62^\circ$.

$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 67{,}38^\circ$.

Anwendungen

Definition: Höhenwinkel

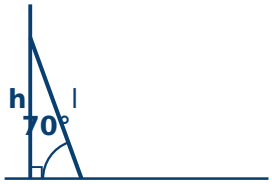
Der **Höhenwinkel** ist der Winkel zwischen der Waagerechten und der Blicklinie nach oben zu einem Punkt, zum Beispiel zur Turmspitze.

Beispiel 5: Höhe über den Höhenwinkel

Du stehst 50 m vom Turm entfernt und siehst die Spitze unter 32°. Wie hoch ist der Turm bei einer Augenhöhe von 1,6 m?

$h = 50 \cdot \tan 32^\circ \approx 31{,}24$ m.

Mit der Augenhöhe: $\approx 32{,}84$ m.



Beispiel 6: Steigung in Prozent

Eine Straße hat 12 % Steigung. Wie groß ist der Neigungswinkel?

12 % bedeutet 12 m Höhenunterschied auf 100 m waagerecht.
$\alpha = \tan^{-1}(0{,}12) \approx 6{,}84^\circ$.

Beispiel 7: Dach

Ein Haus ist 10 m breit, das Dach hat 35° Neigung. Wie hoch ist das Dach, wie lang ist ein Sparren?

Dachhöhe: $h = 5 \cdot \tan 35^\circ \approx 3{,}50$ m.

Sparrenlänge: $\dfrac{5}{\cos 35^\circ} \approx 6{,}10$ m.

Beispiel 8: Gleichschenkliges Dreieck

Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Basis 10 und die Schenkel 13. Berechne die Winkel.

Die Höhe zerlegt es in zwei rechtwinklige Dreiecke: $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, also $\alpha \approx 67{,}38^\circ$.

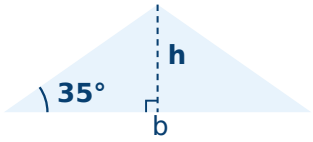
Spitzenwinkel: $180^\circ - 2\alpha \approx 45{,}24^\circ$.

Beispiel 9: Rampe prüfen

Eine Rollstuhlrampe soll höchstens 6 % Steigung haben. Der Höhenunterschied beträgt 0,9 m.

Waagerecht braucht man mindestens $\frac{0{,}9}{0{,}06} = 15$ m.

Neigungswinkel: $\tan^{-1}(0{,}06) \approx 3{,}43^\circ$. Länge der Rampe: $\sqrt{15^2 + 0{,}9^2} \approx 15{,}03$ m.



Besondere Winkel exakt

Für die Winkel $30°$, $45°$ und $60°$ kannst du die Werte exakt angeben. Sie ergeben sich aus dem halben gleichseitigen Dreieck (Seite 2, Höhe $\sqrt{3}$, halbe Seite 1) und dem halben Quadrat (Seite 1, Diagonale $\sqrt{2}$). Daraus folgt $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45° = 1$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$. Diese Werte solltest du auswendig kennen, denn in Prüfungen ohne Taschenrechner werden sie oft gebraucht.

Beispiel 10: Exakter Wert

In einem rechtwinkligen Dreieck mit $\alpha = 30°$ ist die Hypotenuse 14 cm lang. Wie lang ist die Gegenkathete?

$a = 14 \cdot \sin 30° = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$ cm. Die Gegenkathete ist die Hälfte der Hypotenuse.

Beziehungen zwischen den Werten

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Kennst du also einen Wert, kannst du die anderen ohne Taschenrechner berechnen. Außerdem gilt $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, und für die beiden spitzen Winkel gilt $\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$. Mit diesen Regeln prüfst du Ergebnisse.

Beispiel 11: Von sin zu cos und tan

Es ist $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Bestimme $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$.

$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, also $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. Dann $\tan \alpha = \frac{5/13}{12/13} = \frac{5}{12}$.

Höhenwinkel und Tiefenwinkel

Der Höhenwinkel wird von der Waagerechten nach oben zum Ziel gemessen, der Tiefenwinkel nach unten. Beide sind gleich groß, wenn man vom Ziel zurück schaut, denn sie sind Wechselwinkel. Bei Messungen mit eigenen Augen addierst du die Augenhöhe zur berechneten Höhe. Wähle den Tangens, wenn Entfernung und Höhe vorkommen, den Sinus oder Kosinus, wenn die schräge Strecke gegeben oder gesucht ist.

Beispiel 12: Tiefenwinkel

Von einem 60 m hohen Turm sieht man ein Boot unter dem Tiefenwinkel $20°$. Wie weit ist es vom Turmfuß entfernt?

Der Tiefenwinkel ist gleich dem Winkel im Dreieck am Boot. $x = \frac{60}{\tan 20^\circ} \approx 164{,}8$ m.

Typische Fehler

Der häufigste Fehler ist der falsche Taschenrechnermodus: Steht er auf RAD oder GRA statt DEG, sind alle Werte falsch (zum Beispiel $\sin 30 = -0{,}988$ statt $0{,}5$). Kontrolliere deshalb immer mit $\sin 30^\circ = 0{,}5$. Weitere Fehler: Gegenkathete und Ankathete verwechseln, die Wurzel vergessen und Prozent mit Winkelgrad gleichsetzen. Ein Steigungswinkel von $100\,\%$ ist 45°, nicht 90°. Schätze das Ergebnis vor dem Rechnen ab, damit du Fehler schnell erkennst.

Wusstest du?

Der griechische Astronom Hipparchos stellte vor über 2000 Jahren die erste Sehnentafel auf, die man als Vorläufer der Sinustabelle ansehen kann. Heute berechnen Taschenrechner und Smartphones Sinuswerte in Bruchteilen von Sekunden, und die GPS-Ortung funktioniert nur mit Trigonometrie.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Im rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten Hypotenuse (gegenüber 90°), Gegenkathete und Ankathete (bezogen auf den Winkel α).
- $\sin\alpha = \frac{G}{H}$, $\cos\alpha = \frac{A}{H}$, $\tan\alpha = \frac{G}{A}$: Die Werte hängen nur vom Winkel ab, nicht von der Größe des Dreiecks.
- Taschenrechner auf DEG stellen; mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ berechnet man Winkel.
- Besondere Werte: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 45^\circ = 1$.
- Beziehungen: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.
- Seiten berechnen: passendes Verhältnis wählen und umstellen; Winkel berechnen mit der Umkehrfunktion.
- Steigung in Prozent: $p = \tan\alpha \cdot 100\,\%$; Höhenwinkel wird zwischen Waagerechter und Blicklinie gemessen.
- Anwendungen: Höhen messen, Dächer, Rampen, Leitern, Seilbahnen; immer Skizze und Antwortsatz.

Achtung

Der Taschenrechner steht auf RAD oder GRAD statt auf DEG. Gegen- und Ankathete hängen vom Winkel ab. Zum Berechnen eines Winkels brauchst du $\sin^{-1}$, nicht $\sin$. Beim Umstellen gilt $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, also $a = c\sin\alpha$ und $c = \frac{a}{\sin\alpha}$. Wende Pythagoras an, wenn nur Seiten bekannt sind, und Trigonometrie, wenn ein Winkel im Spiel ist.

Zum Einstieg: Gleiche Winkel, gleiche Verhältnisse

Zeichne drei rechtwinklige Dreiecke mit demselben Winkel $\alpha = 30^\circ$, aber

unterschiedlich groß, zum Beispiel mit den Hypotenusen 4 cm, 6 cm und 10 cm. Miss jeweils die Gegenkathete und teile sie durch die Hypotenuse. Du erhältst jedes Mal ungefähr 0,5. Das liegt daran, dass die Dreiecke ähnlich sind: Alle Seiten werden mit demselben Faktor vergrößert. Das Seitenverhältnis hängt deshalb nur vom Winkel ab und nicht von der Größe des Dreiecks. Genau dieses Verhältnis nennt man den Sinus des Winkels.

Beispiel 13

Ein Drachen hängt an einer 50 m langen, straff gespannten Schnur. Die Schnur bildet mit dem Boden einen Winkel von $55°$. Wie hoch fliegt der Drachen, wenn die Hand 1 m über dem Boden ist?

Die Schnur ist die Hypotenuse, die gesuchte Höhe über der Hand ist die Gegenkathete des Winkels. Deshalb verwenden wir den Sinus: $h = 50 \cdot \sin 55° \approx 40{,}96$ m. Dazu addieren wir die Höhe der Hand und erhalten etwa 42 m. Antwort: Der Drachen fliegt ungefähr 42 m über dem Boden.

Häufige Fehler

Viele Fehler entstehen, weil der Taschenrechner auf RAD statt auf DEG eingestellt ist: Dann ist zum Beispiel $\sin 30$ nicht 0,5. Ein zweiter typischer Fehler ist, Gegenkathete und Ankathete zu vertauschen. Markiere deshalb immer zuerst den Winkel, um den es geht, und benenne dann die Seiten. Außerdem gilt: Sinus und Kosinus eines spitzen Winkels liegen immer zwischen 0 und 1. Erhältst du einen größeren Wert, hast du falsch eingesetzt.

Schon gewusst?

Das Wort Sinus kommt vom lateinischen Wort für Bucht oder Krümmung. Es entstand durch einen Übersetzungsfehler aus dem Arabischen. Schon vor über 2000 Jahren nutzte Hipparch Tabellen mit Sehnenlängen, um die Abstände von Sonne und Mond zu schätzen. Heute rechnen Navigationsgeräte, Vermessungsdrohnen und Computerspiele ständig mit Sinus und Kosinus. Auch die Höhe von Bergen wie der Zugspitze wurde früher mit Winkelmessungen aus zwei Standpunkten bestimmt, genau wie in Aufgabe 15.

Ottos Tipp

Zeichne eine Skizze, markiere den Winkel α und beschrifte Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse. Daraus ergibt sich die Formel von selbst. Der zweite spitze Winkel ist immer $90° - \alpha$. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du jedes Ergebnis prüfen.