Arbeitsblatt - Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

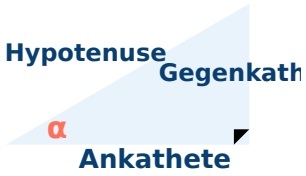
Klasse: Klasse 9 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Die Seiten benennen

Im rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite gegenüber dem Winkel α die Gegenkathete, die anliegende Kathete die Ankathete und die längste Seite die Hypotenuse. Es gilt $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$.



a) Ein Dreieck hat die Seiten $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ (α liegt gegenüber a). Gib Gegenkathete, Ankathete, Hypotenuse für α und für β an.
b) Berechne $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ sowie $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\tan\beta$.
c) Was fällt bei $\sin\alpha$ und $\cos\beta$ auf?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Verhältnisse im Dreieck

Berechne die drei Verhältnisse für den Winkel α, der der kürzeren Kathete gegenüberliegt.

Dreieck	Katheten	Hypotenuse
A	5 und 12	13
B	8 und 15	17
C	20 und 21	29

a) Berechne $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ (vier Nachkommastellen).
b) Bestimme mit dem Taschenrechner den Winkel α für Dreieck A.
c) Welches Dreieck hat den größten Winkel α?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Mit dem Taschenrechner

Stelle den Taschenrechner auf DEG (Gradmaß). Berechne auf vier Nachkommastellen.

a) $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 45^\circ$
b) $\sin 25^\circ$, $\cos 70^\circ$, $\tan 80^\circ$
c) $\sin \alpha = 0{,}5$, $\cos \alpha = 0{,}8$, $\tan \alpha = 2$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Seiten berechnen

Berechne die fehlenden Seiten des rechtwinkligen Dreiecks (rechter Winkel bei C). Runde auf zwei Nachkommastellen.

a) $\alpha = 35^\circ$, $c = 12$ cm; gesucht a und b
b) $\alpha = 50^\circ$, $b = 8$ cm; gesucht a und c
c) $\beta = 28^\circ$, $a = 15$ cm; gesucht b und c

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Winkel berechnen

Berechne die fehlenden Winkel im rechtwinkligen Dreieck (rechter Winkel bei C).

a) $a = 7$ cm, $b = 24$ cm
b) $a = 9$ cm, $c = 15$ cm
c) $b = 5{,}5$ cm, $c = 6{,}5$ cm

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Die Skateboard-Rampe

Eine Rampe steigt unter dem Winkel 15° an und überwindet $1{,}2$ m Höhe.

a) Wie lang ist die Rampenfläche (Hypotenuse)?
b) Wie lang ist die Rampe waagerecht?
c) Wie groß ist die Steigung in Prozent?
d) Die Rampe ist 2 m breit. Wie groß ist die Fläche der Rampenbahn?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die Leiter

Eine 6 m lange Leiter wird an eine Hauswand gelehnt. Als sicher gilt ein Winkel zum Boden zwischen 65° und 75°.

a) Wie hoch reicht die Leiter bei 70°?
b) Wie weit steht der Fuß dann von der Wand?
c) Der Fuß steht $1{,}5$ m von der Wand. Wie groß ist der Winkel? Ist das sicher?
d) Bei welchem Fußabstand erreicht man den Winkel 65°?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Wie hoch ist der Baum?

Mit einem Winkelmesser wird der Höhenwinkel zur Baumspitze gemessen: $\alpha = 38^\circ$ aus 20 m Entfernung. Die Augenhöhe beträgt $1{,}6$ m.



a) Wie hoch ragt der Baum über Augenhöhe?
b) Wie hoch ist der Baum insgesamt?
c) Wie groß ist der Höhenwinkel aus 12 m Entfernung bei gleicher Baumhöhe (Höhe über Auge $15{,}63$ m)?
d) Wie lang ist die Sichtlinie zur Baumspitze aus 20 m Entfernung?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Dachneigung

Ein Satteldach mit der Neigung 35° überspannt ein Haus mit 10 m Breite. Das Haus ist 12 m lang.

a) Wie hoch ist der First über der Traufe?
b) Wie lang ist ein Sparren?
c) Wie groß ist die gesamte Dachfläche?
d) Welche Neigung hat ein Dach, das bei 10 m Breite 4 m hoch ist?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Steigungsschilder

Straßenschilder geben die Steigung in Prozent an: $12\,\%$ bedeuten 12 m Höhe auf 100 m waagerecht.

a) Welchen Winkel hat die Straße bei $12\,\%$ und bei $20\,\%$?
b) Wie viele Höhenmeter überwindet man bei $12\,\%$ auf 500 m waagerecht?
c) Wie lang ist die gefahrene Strecke bei $12\,\%$ auf 500 m waagerecht?
d) Welcher Winkel entspricht $100\,\%$?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Seilbahn

Eine Seilbahn ist 1800 m lang (schräg gemessen) und steigt unter 28° an. Die Kabine fährt mit 6 m/s.

a) Welchen Höhenunterschied überwindet sie?
b) Welche waagerechte Entfernung liegt zwischen Tal- und Bergstation?
c) Wie lange dauert die Fahrt (in Minuten)?
d) Wie groß wäre der Höhenunterschied bei 35°?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Landeanflug

Ein Flugzeug landet mit einem Gleitwinkel von 3°. Es ist noch 900 m über dem Boden.

a) Wie weit ist es waagerecht von der Landebahn entfernt?
b) Wie weit ist es auf der Gleitstrecke (schräg)?
c) Bei 250 km/h ($69{,}4$ m/s) entlang der Gleitstrecke: Wie schnell sinkt es (m/s)?
d) Wie lange dauert der Anflug bis zur Landung (in Minuten)?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Schatten des Mastes

Ein 8 m hoher Mast wirft einen Schatten. Der Sonnenhöhenwinkel ist γ.

a) Wie lang ist der Schatten bei $\gamma = 40^\circ$?
b) Wie lang ist er bei $\gamma = 25^\circ$?
c) Bei welchem Winkel ist der Schatten genau so lang wie der Mast?
d) Der Schatten ist 12 m lang. Welchen Winkel hat die Sonne?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Der Leuchtturm

Ein Leuchtturm ist 45 m hoch (Augenhöhe auf dem Schiff 0 m, vereinfacht). Ein Schiff sieht die Turmspitze unter $4{,}0^\circ$, 2 Minuten später unter $9{,}0^\circ$.

Zeit	Höhenwinkel
0 min	4°
2 min	9°

a) Wie weit ist das Schiff zuerst vom Turm entfernt?
b) Wie weit beim zweiten Mal?
c) Wie weit ist es in der Zeit gefahren, und wie schnell (m/s und Knoten, 1 Kn $= 0{,}514$ m/s)?
d) Wann erreicht das Schiff die Entfernung von 100 m, wenn es gleich schnell weiterfährt?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der Berg und zwei Messungen

Von einem Punkt in der Ebene sieht man die Spitze eines Berges unter 25°. Nach 100 m

geradeaus auf den Berg zu beträgt der Höhenwinkel 32°.

a) Zeichne eine Skizze und stelle für die Bergspitze die Gleichung $\frac{h}{\tan 25^\circ} - \frac{h}{\tan 32^\circ} = 100$ auf.
b) Löse sie nach h auf.
c) Wie weit war der erste Punkt vom Fuß des Berges entfernt?
d) Wie groß ist der Fehler, wenn man den zweiten Winkel mit 33° misst?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das gleichschenklige Dreieck

Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Basis 10 cm und die Basiswinkel 72°.

a) Berechne die Höhe auf der Basis.
b) Berechne die Schenkellänge.
c) Berechne die Fläche und den Umfang.
d) Wie groß ist der Winkel an der Spitze?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Das regelmäßige Fünfeck

Ein regelmäßiges Fünfeck ist in einen Kreis mit dem Radius 10 cm einbeschrieben. Es besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit dem Winkel 72° an der Spitze M.

a) Wie lang ist die Seite des Fünfecks? (Das Dreieck halbiert sich in zwei rechtwinklige.)
b) Wie groß ist die Fläche eines Teildreiecks ($A = \frac{1}{2} r^2 \sin 72^\circ$)?
c) Wie groß ist die Fläche des Fünfecks?
d) Wie groß ist der Umfang?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die Treppe

Jede Stufe einer Treppe ist $17{,}5$ cm hoch und hat einen Auftritt von 28 cm. Die Treppe hat 12 Stufen.

Größe	Wert
Stufenhöhe	17,5 cm
Auftritt	28 cm
Stufen	12

a) Wie groß ist der Steigungswinkel?
b) Welche Höhe überwindet die Treppe und wie lang ist sie waagerecht?
c) Wie lang ist die Lauflinie (schräg)?
d) Prüfe die Schrittmaßregel $2h + a \approx 63$ cm.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Vom Turm aus gesehen

Von der Aussichtsplattform eines 60 m hohen Turms sieht man ein Boot auf dem See unter dem Tiefenwinkel 20° (Winkel zwischen der Waagerechten und der Blickrichtung nach unten). Der Turm steht direkt am Ufer, die Augenhöhe auf der Plattform wird mit 60 m angenommen.

a) Wie weit ist das Boot vom Turmfuß entfernt?
b) Wie lang ist die Sichtlinie von der Plattform zum Boot?
c) Das Boot nähert sich und wird unter 35° gesehen. Wie weit ist es jetzt entfernt?
d) Wie weit ist das Boot in der Zwischenzeit gefahren?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Beziehungen

Für jeden spitzen Winkel gelten $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

a) Prüfe $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ für $\alpha = 37^\circ$ mit dem Taschenrechner.
b) Beweise $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ mit $a^2 + b^2 = c^2$.
c) Es ist $\sin\alpha = 0{,}6$. Bestimme $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ ohne Taschenrechner.
d) Zeige $\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$ mit dem Taschenrechner.