Lösungen - Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

a) Für α: Gegenkathete $a = 3$, Ankathete $b = 4$, Hypotenuse $c = 5$. Für β: Gegenkathete $b = 4$, Ankathete $a = 3$, Hypotenuse 5. Die Hypotenuse liegt immer gegenüber dem rechten Winkel; welche Kathete Gegen- oder Ankathete ist, hängt vom betrachteten Winkel ab.
b) $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$, $\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$; $\sin\beta = 0{,}8$, $\cos\beta = 0{,}6$, $\tan\beta = \frac{4}{3} \approx 1{,}333$. Man setzt die Seitenlängen in die drei Definitionen ein und rechnet die Brüche als Dezimalzahlen aus.
c) $\sin\alpha = \cos\beta = 0{,}6$: Bei $\alpha + \beta = 90^\circ$ gilt $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$. Die Gegenkathete von α ist die Ankathete von β. Deshalb ist der Sinus eines Winkels gleich dem Kosinus seines Ergänzungswinkels.

Lösung zu Aufgabe 2

a) A: $\frac{5}{13} = 0{,}3846$, $\frac{12}{13} = 0{,}9231$, $\frac{5}{12} = 0{,}4167$. B: $\frac{8}{17} = 0{,}4706$, $\frac{15}{17} = 0{,}8824$, $\frac{8}{15} = 0{,}5333$. C: $\frac{20}{29} = 0{,}6897$, $\frac{21}{29} = 0{,}7241$, $\frac{20}{21} = 0{,}9524$. Der Winkel α liegt der kürzeren Kathete gegenüber; diese steht im Sinus und Tangens im Zähler, die längere Kathete im Kosinus.
b) $\alpha = \sin^{-1}(\frac{5}{13}) \approx 22{,}62^\circ$. Mit der Taste $\sin^{-1}$ wird aus dem Verhältnis der Winkel bestimmt. Antwort: In Dreieck A ist $\alpha \approx 22{,}6^\circ$.
c) Dreieck C: $\tan\alpha = 0{,}952$, also $\alpha \approx 43{,}6^\circ$ (A: $22{,}6^\circ$, B: $28{,}1^\circ$). Je größer der Tangens, desto größer der Winkel. Antwort: Dreieck C hat den größten Winkel α.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\sin 30^\circ = 0{,}5000$; $\cos 60^\circ = 0{,}5000$; $\tan 45^\circ = 1{,}0000$. Diese Werte sollte man sich merken; sie dienen auch als Kontrolle, ob der Taschenrechner wirklich auf DEG steht.
b) $\sin 25^\circ \approx 0{,}4226$; $\cos 70^\circ \approx 0{,}3420$; $\tan 80^\circ \approx 5{,}671$. Der Tangens kann größer als 1 werden, Sinus und Kosinus spitzer Winkel aber nie.
c) $\alpha = 30{,}0^\circ$; $\alpha \approx 36{,}87^\circ$; $\alpha \approx 63{,}43^\circ$. Hier ist das Verhältnis gegeben und der Winkel gesucht, deshalb benutzt man die Umkehrtasten $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $a = 12 \cdot \sin 35^\circ \approx 6{,}88$ cm; $b = 12 \cdot \cos 35^\circ \approx 9{,}83$ cm. Die Hypotenuse ist gegeben: Die Gegenkathete berechnet man mit dem Sinus, die Ankathete mit dem Kosinus. Antwort: $a \approx 6{,}88$ cm, $b \approx 9{,}83$ cm.
b) $a = 8 \cdot \tan 50^\circ \approx 9{,}53$ cm; $c = \frac{8}{\cos 50^\circ} \approx 12{,}45$ cm. Hier ist die Ankathete gegeben: Der Tangens liefert die Gegenkathete, der Kosinus die Hypotenuse. Antwort: $a \approx 9{,}53$

cm, $c \approx 12{,}45$ cm.
c) $b = 15 \cdot \tan 28^\circ \approx 7{,}98$ cm; $c = \frac{15}{\cos 28^\circ} \approx 16{,}99$ cm. Man prüft mit Pythagoras: $15^2 + 7{,}98^2 \approx 16{,}99^2$. Die Ergebnisse passen also zusammen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\tan \alpha = \frac{7}{24}$, $\alpha \approx 16{,}26^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 73{,}74^\circ$. Beide Katheten sind bekannt, deshalb wählt man den Tangens. Der zweite Winkel folgt aus der Winkelsumme.
b) $\sin \alpha = \frac{9}{15} = 0{,}6$, $\alpha \approx 36{,}87^\circ$, $\beta \approx 53{,}13^\circ$. Gegenkathete und Hypotenuse sind bekannt, deshalb wählt man den Sinus. Es ist das Dreieck 9-12-15.
c) $\cos \alpha = \frac{5{,}5}{6{,}5}$, $\alpha \approx 32{,}20^\circ$, $\beta \approx 57{,}80^\circ$. Ankathete und Hypotenuse sind bekannt, deshalb wählt man den Kosinus; danach ergänzt man auf 90°.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\sin 15^\circ = \frac{1{,}2}{c}$, $c = \frac{1{,}2}{\sin 15^\circ} \approx 4{,}64$ m. Die Höhe ist die Gegenkathete des Winkels 15°, die Rampenfläche die Hypotenuse. Antwort: Die Rampenfläche ist etwa 4,64 m lang.
b) $b = \frac{1{,}2}{\tan 15^\circ} \approx 4{,}48$ m. Die waagerechte Länge ist die Ankathete, sie wird mit dem Tangens berechnet. Antwort: etwa 4,48 m.
c) $\tan 15^\circ \cdot 100 \approx 26{,}8\,\%$. Die Steigung ist Höhe durch waagerechte Länge, also genau der Tangens des Winkels. Antwort: etwa 26,8 %.
d) $4{,}64 \cdot 2 \approx 9{,}28\,\mathrm{m}^2$. Die Belagfläche ist ein Rechteck aus Rampenlänge und Breite. Antwort: etwa 9,28 m².

Lösung zu Aufgabe 7

a) $h = 6 \cdot \sin 70^\circ \approx 5{,}64$ m. Die Leiter ist die Hypotenuse, die Höhe die Gegenkathete des Winkels am Boden. Antwort: Die Leiter reicht etwa 5,64 m hoch.
b) $x = 6 \cdot \cos 70^\circ \approx 2{,}05$ m. Der Abstand zur Wand ist die Ankathete. Antwort: Der Fuß steht etwa 2,05 m von der Wand entfernt.
c) $\cos \alpha = \frac{1{,}5}{6} = 0{,}25$, $\alpha \approx 75{,}5^\circ$. Aus Ankathete und Hypotenuse folgt der Winkel mit $\cos^{-1}$. Der Winkel liegt knapp über der Grenze von 75°: Die Leiter steht etwas zu steil und ist nicht mehr sicher. Man sollte den Fuß ein wenig weiter von der Wand wegstellen.
d) $x = 6 \cdot \cos 65^\circ \approx 2{,}54$ m. Beim flachsten erlaubten Winkel ist der Abstand am größten. Antwort: höchstens etwa 2,54 m.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $20 \cdot \tan 38^\circ \approx 15{,}63$ m. Die Entfernung ist die Ankathete, die Höhe über Augenhöhe die Gegenkathete; also gilt $x = 20 \cdot \tan 38^\circ$.
b) $15{,}63 + 1{,}6 \approx 17{,}23$ m. Zur gemessenen Höhe muss die Augenhöhe addiert werden. Antwort: Der Baum ist etwa 17,2 m hoch.
c) $\tan \alpha = \frac{15{,}63}{12}$, $\alpha \approx 52{,}5^\circ$. Aus der kleineren Entfernung erscheint die Spitze steiler. Antwort: Der Höhenwinkel beträgt etwa $52{,}5^\circ$.

d) $\frac{20}{\cos 38^\circ} \approx 25{,}38$ m. Die Sichtlinie ist die Hypotenuse, man berechnet sie mit dem Kosinus. Antwort: etwa 25,4 m.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $h = 5 \cdot \tan 35^\circ \approx 3{,}50$ m. Die halbe Hausbreite (5 m) ist die Ankathete des Neigungswinkels. Antwort: Der First liegt etwa 3,50 m über der Traufe.
b) $s = \frac{5}{\cos 35^\circ} \approx 6{,}10$ m. Der Sparren ist die Hypotenuse. Antwort: Ein Sparren ist etwa 6,10 m lang.
c) $2 \cdot 6{,}10 \cdot 12 \approx 146{,}4\,\text{m}^2$. Zwei rechteckige Dachflächen, jede 6,10 m breit und 12 m lang. Antwort: etwa 146,4 m².
d) $\tan\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \approx 38{,}7^\circ$. Mit 4 m Firsthöhe und 5 m halber Breite liefert der Tangens die neue Neigung von etwa $38{,}7^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\alpha = \tan^{-1}(0{,}12) \approx 6{,}84^\circ$; $\tan^{-1}(0{,}2) \approx 11{,}31^\circ$. Die Prozentangabe ist der Tangens des Steigungswinkels: 12 % bedeutet $\tan\alpha = 0{,}12$. Die Winkel sind also viel kleiner, als die Prozentzahlen vermuten lassen.
b) $0{,}12 \cdot 500 = 60$ m. Höhe gleich Steigung mal waagerechte Strecke. Antwort: Man überwindet 60 Höhenmeter.
c) $\sqrt{500^2 + 60^2} \approx 503{,}6$ m. Die gefahrene Strecke ist die Hypotenuse aus 500 m und 60 m. Antwort: etwa 503,6 m.
d) $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$. 100 % bedeutet: Höhe gleich waagerechte Länge, die Katheten sind gleich lang. Antwort: Der Winkel beträgt 45°.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $1800 \cdot \sin 28^\circ \approx 845{,}0$ m. Die Seillänge ist die Hypotenuse, der Höhenunterschied die Gegenkathete. Antwort: etwa 845 m.
b) $1800 \cdot \cos 28^\circ \approx 1589{,}3$ m. Die waagerechte Entfernung ist die Ankathete. Antwort: etwa 1589 m.
c) $\frac{1800}{6} = 300$ s $= 5$ min. Fahrzeit gleich Strecke durch Geschwindigkeit. Antwort: Die Fahrt dauert 300 s, also 5 Minuten.
d) $1800 \cdot \sin 35^\circ \approx 1032{,}4$ m. Bei gleicher Seillänge und größerem Winkel wächst der Höhenunterschied auf etwa 1032 m.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $x = \frac{900}{\tan 3^\circ} \approx 17\,173$ m $\approx 17{,}2$ km. Die Höhe 900 m ist die Gegenkathete, die waagerechte Entfernung die Ankathete; also teilt man durch $\tan 3^\circ$. Antwort: etwa 17,2 km.
b) $s = \frac{900}{\sin 3^\circ} \approx 17\,197$ m. Die Gleitstrecke ist die Hypotenuse und nur wenig länger als die waagerechte Entfernung, weil der Winkel so klein ist.
c) $v_s = 69{,}4 \cdot \sin 3^\circ \approx 3{,}63$ m/s. Die Sinkgeschwindigkeit ist der senkrechte Anteil der Geschwindigkeit. Antwort: etwa 3,6 m pro Sekunde.

d) $\frac{17\,198}{69{,}4} \approx 248$ s $\approx 4{,}1$ min. Zeit gleich Gleitstrecke durch Geschwindigkeit. Antwort: Bis zum Aufsetzen dauert es etwa 4 Minuten.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\frac{8}{\tan 40^\circ} \approx 9{,}53$ m. Die Masthöhe ist die Gegenkathete des Sonnenwinkels, der Schatten die Ankathete. Antwort: etwa 9,53 m.
b) $\frac{8}{\tan 25^\circ} \approx 17{,}16$ m. Bei tiefer stehender Sonne wird der Schatten länger. Antwort: etwa 17,16 m.
c) $\tan\gamma = 1$, also $\gamma = 45^\circ$. Gleich lange Katheten bedeuten $\tan\gamma = 1$. Antwort: bei 45°.
d) $\tan\gamma = \frac{8}{12}$, $\gamma \approx 33{,}7^\circ$. Aus Masthöhe und Schattenlänge bestimmt man den Winkel mit $\tan^{-1}$. Antwort: etwa $33{,}7^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\frac{45}{\tan 4^\circ} \approx 643{,}5$ m. Die Turmhöhe ist die Gegenkathete, die Entfernung die Ankathete. Antwort: Zu Beginn ist das Schiff etwa 644 m entfernt.
b) $\frac{45}{\tan 9^\circ} \approx 284{,}1$ m. Antwort: Zwei Minuten später ist es nur noch etwa 284 m entfernt.
c) $643{,}5 - 284{,}1 \approx 359$ m in 120 s: $\approx 3{,}00$ m/s $\approx 5{,}8$ Knoten. Die zurückgelegte Strecke ist die Differenz der beiden Entfernungen, die Zeit beträgt 120 s.
d) Noch $184{,}1$ m bei $2{,}99$ m/s: ≈ 61 s. Man teilt die Reststrecke durch die Geschwindigkeit. Antwort: Nach etwa einer weiteren Minute erreicht das Schiff den Turm.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Entfernung zum Fuß: erster Punkt $\frac{h}{\tan 25^\circ}$, zweiter $\frac{h}{\tan 32^\circ}$. Die Differenz ist 100 m. In beiden rechtwinkligen Dreiecken ist die Berghöhe h die Gegenkathete; die Ankatheten unterscheiden sich um die 100 m.
b) $h\left(\frac{1}{\tan 25^\circ} - \frac{1}{\tan 32^\circ}\right) = 100$, $h \cdot (2{,}1445 - 1{,}6003) = 100$, $h \approx 183{,}8$ m. Man klammert h aus und teilt durch die Klammer. Antwort: Der Berg ist etwa 184 m hoch.
c) $\frac{183{,}8}{\tan 25^\circ} \approx 394{,}1$ m. Antwort: Der erste Messpunkt ist etwa 394 m vom Fuß des Berges entfernt.
d) $h_{33} = \frac{100}{2{,}1445 - 1{,}5399} \approx 165{,}4$ m, also etwa 18 m weniger: Schon 1° Messfehler verfälscht das Ergebnis stark. Diese Aufgabe zeigt, warum Vermessungsingenieure sehr genaue Winkelmessgeräte benötigen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $h = 5 \cdot \tan 72^\circ \approx 15{,}39$ cm. Die Höhe teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit der Ankathete 5 cm. Antwort: Die Höhe ist etwa 15,39 cm.
b) $s = \frac{5}{\cos 72^\circ} \approx 16{,}18$ cm. Der Schenkel ist die Hypotenuse des Teildreiecks. Antwort: Jeder Schenkel ist etwa 16,18 cm lang.
c) $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15{,}39 \approx 76{,}9\,\text{cm}^2$; $U = 10 + 2 \cdot 16{,}18 \approx 42{,}36$ cm. Fläche: halbe Basis mal Höhe; Umfang: Basis plus zwei Schenkel.

d) $180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°. Antwort: Der Winkel an der Spitze beträgt 36°.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{a}{2} = 10 \cdot \sin 36^\circ$, $a = 20 \cdot \sin 36^\circ \approx 11{,}76$ cm. Die Höhe halbiert den Mittelpunktswinkel auf 36° und die Seite auf $\frac{a}{2}$; der Radius ist die Hypotenuse. Antwort: Die Seite ist etwa 11,76 cm lang.
b) $A = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \sin 72^\circ \approx 47{,}55\,\text{cm}^2$. Für ein Dreieck mit zwei Seiten r und dem eingeschlossenen Winkel gilt $A = \frac{1}{2} r^2 \sin 72^\circ$. Antwort: etwa 47,55 cm².
c) $5 \cdot 47{,}55 \approx 237{,}8\,\text{cm}^2$. Das Fünfeck besteht aus fünf solchen Dreiecken. Antwort: etwa 237,8 cm².
d) $U = 5 \cdot 11{,}76 \approx 58{,}8$ cm. Antwort: Der Umfang beträgt etwa 58,8 cm, etwas weniger als der Kreisumfang $2\pi \cdot 10 \approx 62{,}8$ cm.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $\tan\alpha = \frac{17{,}5}{28} = 0{,}625$, $\alpha \approx 32{,}0^\circ$. Stufenhöhe ist die Gegenkathete, Auftritt die Ankathete. Antwort: Der Steigungswinkel beträgt etwa 32°.
b) Höhe $12 \cdot 17{,}5 = 210$ cm $= 2{,}10$ m; waagerecht $12 \cdot 28 = 336$ cm $= 3{,}36$ m. Man multipliziert jeweils mit der Anzahl der Stufen.
c) $\sqrt{210^2 + 336^2} \approx 396$ cm $\approx 3{,}96$ m. Die Länge der Treppe entlang der Schräge ist die Hypotenuse. Antwort: etwa 3,96 m.
d) $2 \cdot 17{,}5 + 28 = 63{,}0$ cm: genau 63 cm, passend. Die Schrittmaßregel $2h + a \approx 63$ cm ist genau erfüllt, die Treppe ist also bequem begehbar.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $\tan 20^\circ = \frac{60}{x}$, $x = \frac{60}{\tan 20^\circ} \approx 164{,}8$ m. Der Tiefenwinkel ist genauso groß wie der Höhenwinkel vom Boot aus (Wechselwinkel). Die Turmhöhe ist die Gegenkathete. Antwort: Das Boot ist etwa 165 m vom Ufer entfernt.
b) $\frac{60}{\sin 20^\circ} \approx 175{,}4$ m. Die Sichtlinie ist die Hypotenuse. Antwort: etwa 175 m.
c) $\frac{60}{\tan 35^\circ} \approx 85{,}7$ m. Beim größeren Tiefenwinkel ist das Boot näher am Turm. Antwort: etwa 86 m.
d) $164{,}8 - 85{,}7 \approx 79{,}2$ m. Antwort: Das Boot ist in der Zwischenzeit etwa 79 m auf den Turm zugefahren.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\sin 37^\circ \approx 0{,}6018$, $\cos 37^\circ \approx 0{,}7986$; $0{,}3622 + 0{,}6378 = 1{,}0000$. Man quadriert beide Werte und addiert; bis auf Rundung ergibt sich genau 1.
b) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$. Im letzten Schritt wird der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ benutzt. Damit gilt die Beziehung für jeden spitzen Winkel.
c) $\cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, $\cos\alpha = 0{,}8$, $\tan\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$. Aus $\sin\alpha = 0{,}6$ folgt mit der ersten Beziehung der Kosinus, mit der zweiten der Tangens. Man nimmt die

positive Wurzel, weil der Winkel spitz ist.
d) $\sin 25^\circ = 0{,}4226$, $\cos 65^\circ = 0{,}4226$: gleich. Die Winkel 25° und 65° ergänzen sich zu 90°, daher gilt $\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$.