Lösungen zur Klassenarbeit - Satz des Pythagoras

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Gegeben sind die beiden Katheten a und b, gesucht ist die Hypotenuse. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $c^2 = a^2 + b^2 = 400 + 441 = 841$ (1 P.). Wurzelziehen: $c = \sqrt{841} = 29$ cm (1 P.).

b) Jetzt ist die Hypotenuse $c = 2{,}5$ m bekannt und eine Kathete gesucht. Man stellt um: $a^2 = c^2 - b^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$ (1 P.), also $a = 2$ m (1 P.). Kontrolle: Die Hypotenuse muss die längste Seite sein; das trifft in beiden Teilaufgaben zu ($29 > 21$, $2{,}5 > 2$). Hinweis: 20, 21, 29 ist ein bekanntes pythagoreisches Zahlentripel. Antwort: $c = 29$ cm und $a = 2$ m.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist ein Dreieck genau dann rechtwinklig, wenn die Summe der Quadrate der beiden kürzeren Seiten gleich dem Quadrat der längsten Seite ist.

a) $9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681$ und $41^2 = 1681$ (1 P.). Gleichheit: Das Dreieck ist rechtwinklig, der rechte Winkel liegt gegenüber der Seite 41 cm (1 P.).

b) $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$, aber $10^2 = 100$ (1 P.). Da $85 \neq 100$ gilt, ist das Dreieck nicht rechtwinklig. Weil $85 < 100$, ist der Winkel gegenüber der längsten Seite sogar größer als 90°: Das Dreieck ist stumpfwinklig (1 P.). Antwort: a) ja, b) nein.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren sich. So entstehen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten $\frac{16}{2} = 8$ cm und $\frac{12}{2} = 6$ cm; die Rautenseite a ist die Hypotenuse (1 P.).

$a = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ cm (1 P.).

b) Alle vier Seiten sind gleich lang, also $U = 4 \cdot 10 = 40$ cm (1 P.). Für die Fläche einer Raute gilt $A = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96\,\text{cm}^2$ (1 P.). Kontrolle über die Teildreiecke: $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 96\,\text{cm}^2$, gleiches Ergebnis. Antwort: Seite 10 cm, Umfang 40 cm, Fläche $96\,\text{cm}^2$.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Der Giebel ist ein gleichschenkliges Dreieck. Die Höhe teilt ihn in zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten $\frac{8}{2} = 4$ m und 3 m; der Sparren ist die Hypotenuse (1 P.).

$s = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ m (1 P.).

b) Jede Dachseite ist ein Rechteck aus Sparrenlänge und Hauslänge: $5 \cdot 10 = 50\,\mathrm{m}^2$. Zwei Seiten ergeben $100\,\mathrm{m}^2$ (2 P.). Häufiger Fehler: die Giebelbreite 8 m statt der Sparrenlänge verwenden; dann käme man nur auf $80\,\mathrm{m}^2$.
c) Kosten gleich Fläche mal Preis pro Quadratmeter: $100 \cdot 14 = 1400$ € (1 P.). Antwort: Sparren 5 m, Dachfläche $100\,\mathrm{m}^2$, Ziegelkosten 1400 €.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Zuerst berechnet man die Diagonale der Grundfläche: $d_G = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ dm. Diese Diagonale und die Höhe 12 dm bilden wieder ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Raumdiagonale ist: $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ dm (2 P.). Zusammengefasst entspricht das der Formel $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{9 + 16 + 144}$.
b) Die Raumdiagonale ist die längste Strecke, die in den Quader passt. Weil $12{,}5 < 13$ gilt, lässt sich der Stab schräg von einer unteren Ecke zur gegenüberliegenden oberen Ecke legen (1 P.). Senkrecht allein passt er dagegen nicht, denn $12{,}5 > 12$. Antwort: 13 dm; ja, der Stab passt schräg hinein.