Lernzettel - Satz des Pythagoras

Klasse: Klasse 9

Der Satz des Pythagoras ist das wichtigste Werkzeug für Längen in rechtwinkligen Dreiecken. Du wendest ihn in Flächen, Körpern und im Koordinatensystem an.

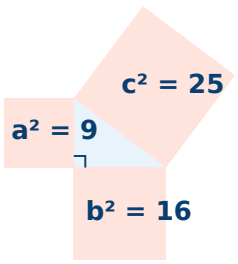
Einstieg: Der Weg über den Platz

Auf dem Schulhof zeigen zwei Wege von der Tür zum Tor: der Weg an den Seiten entlang (30 m und 40 m, also 70 m) und der Weg quer über den Platz. Wer wählt den kürzeren Weg? Der Weg quer ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks und beträgt $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ m. Der Satz des Pythagoras ist eines der nützlichsten Werkzeuge der Geometrie. Du kennst ihn aus der Klasse 8, in der Klasse 9 wendest du ihn auf anspruchsvollere Figuren an: auf Körper im Raum, auf Kreise, Dächer, Navigation und Koordinaten. Dazu lernst du den Höhen- und Kathetensatz kennen, der das Verhältnis der Abschnitte auf der Hypotenuse beschreibt. Zeichne dir in jeder Aufgabe zuerst das passende rechtwinklige Dreieck.

Der Satz des Pythagoras

Definition: Katheten und Hypotenuse

In einem **rechtwinkligen Dreieck** heißen die beiden Seiten am rechten Winkel **Katheten** (a und b). Die Seite gegenüber dem rechten Winkel ist die längste Seite und heißt **Hypotenuse** (c).



Satz: Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Der Satz gilt nur, wenn c die Hypotenuse ist, also gegenüber dem rechten Winkel liegt.

Regel: Umstellen

- Hypotenuse: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (addieren)
- Kathete: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ und $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (subtrahieren)

Beispiel 1: Hypotenuse

Berechne c für $a = 6$ cm und $b = 8$ cm.

$c^2 = 36 + 64 = 100$, also $c = 10$ cm.

Beispiel 2: Kathete

Berechne b für $c = 13$ cm und $a = 5$ cm.

$b^2 = 169 - 25 = 144$, also $b = 12$ cm.

Definition: pythagoreisches Tripel

Drei natürliche Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ heißen **pythagoreisches Tripel**. Bekannt sind $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$ und $(7, 24, 25)$. Vielfache sind wieder Tripel, zum Beispiel $(6, 8, 10)$.

Satz: Umkehrung

Gilt in einem Dreieck mit den Seiten a, b und der längsten Seite c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist es rechtwinklig.

Beispiel 3: Rechtwinklig?

Sind die Dreiecke mit den Seiten 7, 24, 25 und 6, 8, 11 rechtwinklig?

$49 + 576 = 625 = 25^2$. Ja, rechtwinklig.

$36 + 64 = 100 \neq 121$. Nein.

Wichtige Anwendungen

Regel: Figuren

- **Quadrat:** Diagonale $d = a\sqrt{2}$.
- **Rechteck:** $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Gleichseitiges Dreieck:** Höhe $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, Fläche $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.
- **Gleichschenkliges Dreieck:** Die Höhe zur Basis halbiert die Basis.
- **Raute:** Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich: $a = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2}$.

- **Abstand zweier Punkte:** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Regel: Im Raum

Bei einem Quader mit den Kanten a, b, c berechnest du zuerst die Flächendiagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ und dann die Raumdiagonale $e = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Beim Würfel mit Kante a ist $e = a\sqrt{3}$. Auch bei Pyramide und Kegel entstehen so rechtwinklige Dreiecke.

So gehst du vor: Sachaufgabe

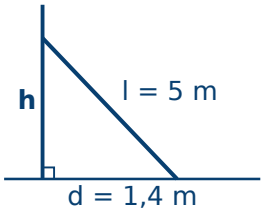
1. Lies die Aufgabe genau und zeichne eine Skizze.
2. Suche das rechtwinklige Dreieck und markiere den rechten Winkel.
3. Beschrifte Katheten und Hypotenuse.
4. Entscheide: addieren oder subtrahieren?
5. Rechne, ziehe die Wurzel und runde sinnvoll.
6. Schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 4: Leiter an der Wand

Eine 5 m lange Leiter steht 1,4 m von der Hauswand entfernt. Wie hoch reicht sie?

$h^2 = 5^2 - 1{,}4^2 = 25 - 1{,}96 = 23{,}04$, also $h = 4{,}8$ m.

Antwort: Die Leiter reicht 4,8 m hoch.

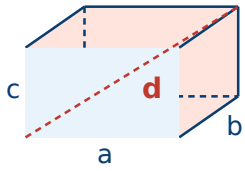


Beispiel 5: Raumdiagonale

Ein Quader misst 3 cm × 4 cm × 12 cm. Wie lang ist die Raumdiagonale?

Grundflächendiagonale $d = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Raumdiagonale $e = \sqrt{25 + 144} = 13$ cm.

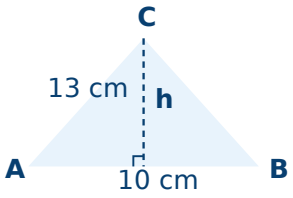


Beispiel 6: Gleichschenkliges Dreieck

Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Basis 16 cm und die Schenkel 17 cm. Wie groß sind Höhe und Fläche?

Die Höhe teilt die Basis in zwei Stücke zu je 8 cm. Im rechtwinkligen Dreieck ist 17 cm die Hypotenuse.

$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$ cm. Fläche: $A = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$ cm².

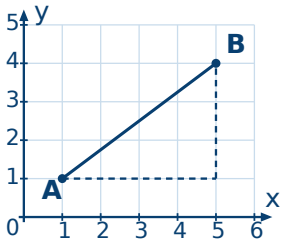


Beispiel 7: Abstand im Koordinatensystem

Berechne den Abstand von $A(-2|1)$ und $B(4|9)$.

Unterschied der x-Werte: 6, der y-Werte: 8. Das sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks.

$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Da du Differenzen quadrierst, spielt das Vorzeichen keine Rolle.

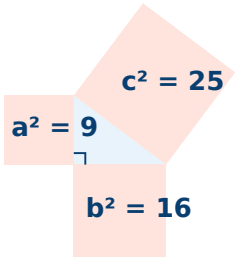


Der Beweis mit Flächen

Satz: Beweis

Lege vier gleiche rechtwinklige Dreiecke so in ein Quadrat der Seite $a + b$, dass innen ein Quadrat der Seite c frei bleibt. Die Fläche des großen Quadrats ist $(a + b)^2$. Sie besteht aus vier Dreiecken mit je $\frac{1}{2}ab$ und dem inneren Quadrat c^2.

Also gilt $(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$, das heißt $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ und damit $a^2 + b^2 = c^2$.



Hinweis

Der Satz ist nach Pythagoras von Samos benannt, wurde aber schon früher von Babyloniern, Indern und Chinesen genutzt. Es gibt mehr als hundert Beweise, auch mit ähnlichen Dreiecken (Kathetensatz und Höhensatz). Zimmerleute nutzten die 3-4-5-Schnur, um rechte Winkel abzustecken.

Pythagoras im Kreis

Im Kreis steckt der Satz des Pythagoras in jeder Sehne. Verbindest du den Mittelpunkt M mit dem Mittelpunkt der Sehne, steht diese Strecke senkrecht auf der Sehne. Mit dem Radius r, dem Abstand d der Sehne vom Mittelpunkt und der halben Sehnenlänge $\frac{s}{2}$ entsteht ein rechtwinkliges Dreieck: $r^2 = d^2 + (\frac{s}{2})^2$. Eine Tangente steht ebenfalls senkrecht auf dem Berührradius. Deshalb gilt für die Tangentenlänge t von einem Punkt im Abstand m vom Mittelpunkt: $t^2 = m^2 - r^2$.

Beispiel 8: Sehne

Ein Kreis hat den Radius 10 cm. Eine Sehne ist 16 cm lang. Wie weit ist sie vom Mittelpunkt entfernt?

Halbe Sehne 8 cm. $d = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm.

Beispiel 9: Tangente

Ein Punkt P liegt 13 cm vom Mittelpunkt eines Kreises mit $r = 5$ cm entfernt. Wie lang ist die Tangente von P zum Berührpunkt?

$t = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Pythagoras bei Pyramide und Kegel

Bei Pyramide und Kegel sitzen rechtwinklige Dreiecke im Körper. In der quadratischen Pyramide verbindet die Seitenhöhe h_s die Spitze mit der Mitte einer Grundkante: $h_s^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$. Im Kegel gilt $s^2 = r^2 + h^2$ für die Mantellinie. Das brauchst du, um Mantelflächen und Oberflächen zu berechnen.

Beispiel 10: Kegel

Ein Kegel hat $r = 9$ cm und $h = 12$ cm. Wie lang ist die Mantellinie?

$s = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ cm.

Kathetensatz und Höhensatz

Zeichnest du im rechtwinkligen Dreieck die Höhe h auf die Hypotenuse, teilt sie diese in die Abschnitte p und q mit $p + q = c$. Dann gelten der Kathetensatz $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ sowie der Höhensatz $h^2 = p \cdot q$. Die Sätze folgen aus der Ähnlichkeit der drei Dreiecke. Mit ihnen lassen sich Quadrate flächengleich in Rechtecke verwandeln und Wurzeln konstruieren.

Beispiel 11: Höhensatz

Die Höhe teilt die Hypotenuse in $p = 4$ cm und $q = 9$ cm. Wie lang ist h und wie lang sind die Katheten?

$h = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ cm. $c = 13$ cm. $a = \sqrt{13 \cdot 4} = \sqrt{52} \approx 7{,}21$ cm,
$b = \sqrt{13 \cdot 9} = \sqrt{117} \approx 10{,}82$ cm. Probe: $52 + 117 = 169 = 13^2$.

Pythagoras und Winkel

Der Satz sagt etwas über Längen, nicht über Winkel. Wenn du aber die drei Seiten kennst, kannst du erkennen, ob ein Winkel kleiner, gleich oder größer als $90°$ ist. Gilt $a^2 + b^2 > c^2$, ist der Winkel gegenüber c spitz. Gilt $a^2 + b^2$, ist er stumpf. So kannst du zum Beispiel prüfen, ob ein Dreieck mit den Seiten 5, 6 und 8 einen stumpfen Winkel hat: $25 + 36 = 61$.

Wusstest du?

Der Satz des Pythagoras wurde auf einer babylonischen Tontafel (Plimpton 322) schon etwa 1000 Jahre vor Pythagoras genutzt. Heute steckt er in Navigationsgeräten, die Entfernungen zwischen Satelliten und Empfängern berechnen, in Computerspielen für Abstände und in jeder Wasserwaage der Handwerker.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Im rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$; c liegt gegenüber dem rechten Winkel und ist die längste Seite.
- Hypotenuse: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; Kathete: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.
- Umkehrung: Gilt $a^2 + b^2 = c^2$, ist das Dreieck rechtwinklig.
- Quadrat: $d = a\sqrt{2}$; gleichseitiges Dreieck: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; Würfel: Raumdiagonale $a\sqrt{3}$.
- Raum: Quader $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; Pyramide und Kegel mit Seitenhöhe bzw. Mantellinie.

- Kreis: Radius, halbe Sehne und Abstand vom Mittelpunkt bilden ein rechtwinkliges Dreieck; die Tangente steht senkrecht zum Radius.
- Kathetensatz $a^2 = c \cdot p$ und Höhensatz $h^2 = p \cdot q$ im rechtwinkligen Dreieck mit Höhe h auf c.
- Abstand zweier Punkte: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; Skizze, Antwortsatz, Einheit.

Achtung

Verwechsle die Hypotenuse nicht: Sie liegt immer gegenüber dem rechten Winkel und ist die längste Seite. Rechne $a^2 + b^2 = c^2$, nicht $a + b = c$. Vergiss die Wurzel am Ende nicht. Bei einer gesuchten Kathete wird subtrahiert. Schreibe die Einheit in den Antwortsatz.

Zum Einstieg: Die Knotenschnur

Schon die Baumeister im alten Ägypten sollen eine Schnur mit zwölf gleichen Abständen benutzt haben, um rechte Winkel abzustecken. Spannt man die Schnur so zu einem Dreieck, dass die Seiten 3, 4 und 5 Abschnitte lang sind, dann entsteht automatisch ein rechter Winkel. Probiere es selbst mit einer Schnur und zwölf Knoten aus: Du wirst sehen, dass der Winkel zwischen den Seiten 3 und 4 genau so groß ist wie die Ecke eines Blatts Papier. Genau diese Beobachtung beschreibt die Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Beispiel 12

Ein Fernseher wird mit der Bildschirmdiagonale angegeben. Ein Gerät hat ein Bild, das 89 cm breit und 50 cm hoch ist. Wie groß ist die Diagonale in Zoll (1 Zoll = 2,54 cm)?

Breite und Höhe des Bildes stehen senkrecht aufeinander, sie sind also die Katheten. Die Diagonale ist die Hypotenuse. Wir rechnen $d = \sqrt{89^2 + 50^2} = \sqrt{7921 + 2500} = \sqrt{10421} \approx 102{,}1$ cm. Um in Zoll umzurechnen, teilen wir durch 2,54 und erhalten etwa 40,2. Antwort: Es handelt sich um einen Fernseher mit ungefähr 40 Zoll Bildschirmdiagonale.

So gehst du bei Sachaufgaben vor

1. Lies den Text genau und fertige eine Skizze an.
2. Suche in der Skizze ein rechtwinkliges Dreieck und markiere den rechten Winkel.
3. Bestimme die Hypotenuse: Sie liegt dem rechten Winkel gegenüber.
4. Entscheide, ob du addierst (Hypotenuse gesucht) oder subtrahierst (Kathete gesucht).
5. Rechne, runde sinnvoll und überprüfe, ob das Ergebnis realistisch ist.
6. Schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Schon gewusst?

Für den Satz des Pythagoras gibt es mehr als 300 verschiedene Beweise. Einer davon stammt sogar von einem späteren Präsidenten der USA, James Garfield. Zahlen wie 3, 4, 5 oder 5, 12, 13, bei denen alle drei Seiten ganzzahlig sind, nennt man pythagoreische Tripel. Multipliziert man ein solches Tripel mit einer Zahl, entsteht wieder ein Tripel, zum Beispiel 6, 8, 10.

Ottos Tipp

Zeichne immer eine Skizze und beschrifte a, b, c, bevor du rechnest. Frage dich: Ist die gesuchte Seite die längste? Dann addierst du die Quadrate, sonst subtrahierst du. Prüfe am Ende: Die Hypotenuse muss länger sein als jede Kathete.