Lösungen - Satz des Pythagoras

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

Gegeben sind jeweils die beiden Katheten, gesucht ist die Hypotenuse. Deshalb werden die Quadrate der Katheten addiert und danach wird die Wurzel gezogen.
a) $c = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ cm. Antwort: Die Hypotenuse ist 15 cm lang.
b) $c = \sqrt{5{,}76 + 3{,}24} = \sqrt{9} = 3$ m. Die Dezimalzahlen werden zuerst quadriert. Antwort: Die Hypotenuse ist 3 m lang.
c) $c = \sqrt{121 + 3600} = \sqrt{3721} = 61$ cm. Antwort: Die Hypotenuse ist 61 cm lang, also deutlich länger als die längere Kathete.
d) $c = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$ cm. Bei gleich langen Katheten gilt $c = a\sqrt{2}$. Antwort: Die Hypotenuse ist etwa 9,90 cm lang.

Lösung zu Aufgabe 2

Hier ist die Hypotenuse gegeben. Eine Kathete erhältst du, indem du vom Quadrat der Hypotenuse das Quadrat der bekannten Kathete subtrahierst.
a) $b = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ cm. Antwort: Die fehlende Kathete ist 24 cm lang.
b) $a = \sqrt{72{,}25 - 16} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ m. Antwort: Die fehlende Kathete ist 7,5 m lang.
c) $a = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71$ cm. Die Wurzel wird teilweise gezogen: $45 = 9 \cdot 5$. Antwort: Die Kathete ist etwa 6,71 cm lang.

Lösung zu Aufgabe 3

Nach der Umkehrung des Satzes gilt: Ist die Summe der Quadrate der beiden kürzeren Seiten gleich dem Quadrat der längsten Seite, dann ist das Dreieck rechtwinklig.
a) $0{,}81 + 1{,}44 = 2{,}25 = 1{,}5^2$: rechtwinklig. Die Gleichung stimmt, der rechte Winkel liegt gegenüber der Seite 1,5 m.
b) $144 + 1225 = 1369 = 37^2$: rechtwinklig. Die Gleichung stimmt, der rechte Winkel liegt gegenüber der Seite 37 cm.
c) $64 + 225 = 289 \neq 324 = 18^2$: nicht rechtwinklig. Weil 289, ist der größte Winkel sogar stumpf.
d) $2{,}25 + 4 = 6{,}25 = 2{,}5^2$: rechtwinklig. Dieses Dreieck ist das Dreieck 3-4-5, nur mit dem Faktor 0,5 verkleinert.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $c^2 = 49 + 576 = 625\,\text{cm}^2$, also $c = 25$ cm (Katheten 7 und 24). Die Flächen der Quadrate über den Katheten werden addiert und ergeben die Fläche des Quadrats über der Hypotenuse. Antwort: Das große Quadrat hat 625 cm² Fläche, die Hypotenuse ist 25 cm lang.

b) $h = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm; $A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6{,}93 \approx 27{,}71\,\text{cm}^2$ (genau $16\sqrt{3}$). Die Höhe teilt das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse 8 cm und Kathete 4 cm. Antwort: Die Höhe beträgt etwa 6,93 cm, die Fläche etwa 27,71 cm².
c) Die Höhe halbiert die Grundseite: $h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$, also $h^2 = \frac{3}{4}a^2$ und $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Man zieht die Wurzel aus $\frac{3}{4}a^2$, dabei gilt $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit ist die Formel für jede Seitenlänge a bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $b = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$ cm; $U = 2 \cdot (8 + 15) = 46$ cm; $A = 8 \cdot 15 = 120\,\text{cm}^2$. Die Diagonale ist die Hypotenuse, die Rechteckseiten sind die Katheten. Antwort: Die zweite Seite ist 15 cm lang, der Umfang beträgt 46 cm und die Fläche 120 cm².
b) $a = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm. Da sich die Diagonalen senkrecht halbieren, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 12 cm und 5 cm. Antwort: Jede Seite der Raute ist 13 cm lang.
c) $U = 4 \cdot 13 = 52$ cm; $A = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120\,\text{cm}^2$. Alle vier Seiten der Raute sind gleich lang. Antwort: Der Umfang beträgt 52 cm und die Fläche 120 cm².

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\frac{14-6}{2} = 4$ cm. Die längere Grundseite ist um 8 cm länger; dieser Unterschied verteilt sich gleichmäßig auf beide Seiten. Antwort: Der Überstand beträgt auf jeder Seite 4 cm.
b) $h = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ cm. Schenkel (Hypotenuse), Überstand und Höhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Antwort: Das Trapez ist 3 cm hoch.
c) $A = \frac{14+6}{2} \cdot 3 = 30\,\text{cm}^2$; $U = 14 + 6 + 5 + 5 = 30$ cm. Für die Fläche nimmt man den Mittelwert der Grundseiten mal die Höhe. Antwort: Die Fläche beträgt 30 cm² und der Umfang 30 cm.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $s = \sqrt{4{,}8^2 + 3{,}6^2} = \sqrt{36{,}00} = 6{,}0$ m. Die halbe Hausbreite (4,8 m) und die Firsthöhe sind die Katheten, der Sparren ist die Hypotenuse. Antwort: Ein Sparren ist 6 m lang.
b) $A = 2 \cdot 6 \cdot 14 = 168\,\text{m}^2$. Das Dach besteht aus zwei Rechtecken, jedes 6 m breit und 14 m lang. Antwort: Die Dachfläche beträgt 168 m².
c) $168 \cdot 10 = 1680$ Ziegel. Antwort: Man braucht 1680 Ziegel (ohne Reserve für Bruch).
d) Sparren $6{,}5$ m; $A = 2 \cdot 6{,}5 \cdot 14 = 182\,\text{m}^2$. Die Neigung bleibt gleich, also wird nur die Sparrenlänge um 0,5 m länger. Antwort: Die Dachfläche wächst auf 182 m².

Lösung zu Aufgabe 8

a) $0{,}06 = \frac{0{,}6}{x}$, also $x = 10$ m. Die Steigung ist Höhe geteilt durch waagerechte Länge;

man löst nach x auf: $x = 0{,}6 : 0{,}06$. Antwort: Die Rampe muss mindestens 10 m lang sein.
b) $\sqrt{100 + 0{,}36} = \sqrt{100{,}36} \approx 10{,}018$ m. Die geneigte Fläche ist die Hypotenuse mit den Katheten 10 m und 0,6 m. Antwort: Sie ist etwa 10,02 m lang, kaum länger als die waagerechte Strecke.
c) $10{,}018 \cdot 1{,}2 \approx 12{,}02\,\mathrm{m}^2$. Der Belag ist ein Rechteck aus Rampenlänge und Breite. Antwort: Er hat etwa 12,02 m² Fläche.
d) $12{,}02 \cdot 48 \approx 577$ €. Antwort: Der Belag kostet ungefähr 577 €.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\sqrt{144 + 25} = 13$ km. Norden und Osten stehen senkrecht aufeinander, also sind 12 km und 5 km die Katheten. Antwort: Das Schiff ist 13 km vom Start entfernt.
b) $17 - 13 = 4$ km kürzer. Der Umweg ist $12 + 5 = 17$ km lang. Antwort: Die direkte Strecke ist 4 km kürzer.
c) Umweg: $\frac{17}{20} \cdot 60 = 51$ min; direkt: $\frac{13}{20} \cdot 60 = 39$ min. Zeit ist Strecke geteilt durch Geschwindigkeit, umgerechnet in Minuten. Antwort: Der Umweg dauert 51 Minuten, die direkte Fahrt 39 Minuten.
d) $\sqrt{81 + 1600} = \sqrt{1681} = 41$ km. Antwort: Die direkte Strecke wäre 41 km lang.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0{,}3 + 0{,}09} = \sqrt{3822{,}69} \approx 61{,}8$ km. Man setzt $R = 6371$ km und $h = 0{,}3$ km in die umgestellte Formel ein. Antwort: Vom Turm sieht man etwa 61,8 km weit.
b) $(R + h)^2 = R^2 + 2Rh + h^2$, also $d^2 = 2Rh + h^2$. Nach der binomischen Formel wird R^2 auf beiden Seiten subtrahiert; dann zieht man die Wurzel und erhält $d = \sqrt{2Rh + h^2}$.
c) $\sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0{,}3} \approx 61{,}83$ km. Der Unterschied ist winzig, weil h^2 sehr klein ist. Die Näherung weicht nur um wenige Meter ab und genügt für die Praxis.
d) $h \approx \frac{d^2}{2R} = \frac{2500}{12742} \approx 0{,}196$ km ≈ 196 m. Man stellt die Näherung nach h um: $h = d^2 : (2R)$. Antwort: Der Turm müsste etwa 196 m hoch sein.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $d = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Die halbe Sehne ist 12 cm, der Radius 13 cm ist die Hypotenuse. Antwort: Die Sehne ist 5 cm vom Mittelpunkt entfernt.
b) $\sqrt{169 - 144} = 5$, Sehne $2 \cdot 5 = 10$ cm. Nun ist der Abstand 12 cm eine Kathete, die halbe Sehne ist 5 cm. Antwort: Die Sehne ist 10 cm lang.
c) Der Durchmesser: 26 cm (Abstand 0). Je näher die Sehne am Mittelpunkt liegt, desto länger ist sie. Antwort: Die längste Sehne ist der Durchmesser mit 26 cm.
d) $2 \cdot \sqrt{169 - 25} = 2 \cdot 12 = 24$ cm: die Sehne aus a). Antwort: Die Sehne ist 24 cm lang; Abstand 5 cm und Länge 24 cm passen also genau zu Teil a).

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\sqrt{144+25}=13$ m. Mast (12 m) und Abstand am Boden (5 m) sind die Katheten. Antwort: Ein Seil ist ohne Befestigung 13 m lang.
b) $3\cdot(13+0{,}4)=40{,}2$ m. Zu jedem Seil kommen 0,40 m hinzu, danach wird mit 3 multipliziert. Antwort: Man braucht insgesamt 40,2 m Seil.
c) $40{,}2\cdot 2{,}40=96{,}48$ €. Antwort: Das Seil kostet 96,48 €.
d) $\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9$ m. Jetzt ist das Seil die Hypotenuse und der Abstand die gesuchte Kathete. Antwort: Die Anker müssten 9 m vom Mastfuß entfernt stehen.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\sqrt{33^2+20^2}=\sqrt{1489}\approx 38{,}59$ cm. Länge und Breite des Bodens sind die Katheten. Antwort: Die Bodendiagonale ist etwa 38,59 cm lang.
b) $\sqrt{1489+144}=\sqrt{1633}\approx 40{,}41$ cm. Bodendiagonale und Höhe bilden ein neues rechtwinkliges Dreieck. Antwort: Die Raumdiagonale ist etwa 40,41 cm lang.
c) 38: ja. $41>40{,}41$: nein. Der längste Stab, der hineinpasst, liegt auf der Raumdiagonale. Antwort: Der 38-cm-Stab passt, der 41-cm-Stab nicht.
d) Die Raumdiagonale: $\approx 40{,}41$ cm. Die Ecken des Kartons liegen auf der Kugel, die Raumdiagonale ist ihr Durchmesser. Antwort: Die Kugel hat etwa 40,41 cm Durchmesser.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $h_s=\sqrt{4^2+3^2}=5$ cm. Höhe und halbe Grundkante (3 cm) bilden mit h_s ein rechtwinkliges Dreieck. Antwort: Die Seitenhöhe beträgt 5 cm.
b) Halbe Diagonale $3\sqrt{2}$: $\sqrt{16+18}=\sqrt{34}\approx 5{,}83$ cm. Für die Seitenkante braucht man die halbe Diagonale der Grundfläche: $\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$. Antwort: Die Seitenkante ist etwa 5,83 cm lang.
c) $M=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=60\,\text{cm}^2$. Der Mantel besteht aus vier gleichen Dreiecken mit Grundseite 6 cm und Höhe 5 cm. Antwort: Die Mantelfläche beträgt 60 cm².
d) $h=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}\approx 5{,}20$ cm. Jetzt ist $h_s=6$ cm die Hypotenuse. Antwort: Die Pyramide müsste etwa 5,20 cm hoch sein.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Halbe Diagonale $3\sqrt{2}\approx 4{,}24$; $\sqrt{16+18}=\sqrt{34}\approx 5{,}83$ m; vier Seile: $\approx 23{,}3$ m. Mast und halbe Diagonale des Feldes sind die Katheten. Antwort: Ein Eckseil ist etwa 5,83 m lang, alle vier zusammen etwa 23,3 m.
b) $\sqrt{16+9}=5$ m. Hier ist die Kathete am Boden die halbe Feldseite (3 m). Antwort: Das Seil zur Seitenmitte ist 5 m lang.
c) $4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=60\,\text{m}^2$. Das Netz besteht aus vier Dreiecken mit Grundseite 6 m und Höhe 5 m. Antwort: Das Netz ist 60 m² groß.

d) $60 \cdot 8 = 480$ €. Antwort: Das Netz kostet 480 €.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $HG = \sqrt{36 + 64} = 10$; $GS = \sqrt{36 + 64} = 10$; $HS = 12$. Man bildet die Differenzen der Koordinaten und setzt sie in die Abstandsformel ein. Antwort: $HG = GS = 10$ km, $HS = 12$ km.
b) $10^2 + 10^2 = 200 \neq 144 = 12^2$: nicht rechtwinklig, aber gleichschenklig. Die längste Seite ist HS. Da die Gleichung nicht erfüllt ist, gibt es keinen rechten Winkel.
c) $U = 10 + 10 + 12 = 32$ km; Höhe $h = \sqrt{100 - 36} = 8$ km, $A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48\,\text{km}^2$. Weil das Dreieck gleichschenklig ist, trifft die Höhe von G die Seite HS in der Mitte. Antwort: Umfang 32 km, Fläche 48 km².
d) $20 - 12 = 8$ km. Über den Gipfel geht man $10 + 10 = 20$ km. Antwort: Der direkte Weg spart 8 km.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $h = \sqrt{25 - 9} = 4$ m. Die Leiter ist die Hypotenuse, Abstand und Höhe sind die Katheten. Antwort: Die Leiter reicht 4 m hoch.
b) Abstand 4 m: $h = \sqrt{25 - 16} = 3$ m. Die Spitze ist um 1 m gesunken. Antwort: Die Leiter reicht nur noch 3 m hoch, die Spitze ist also 1 m nach unten gerutscht.
c) Abstand 5 m: $h = \sqrt{25 - 25} = 0$: die Leiter liegt am Boden. Der Abstand ist jetzt so groß wie die Leiterlänge, es gibt kein Dreieck mehr.
d) $x = \sqrt{25 - 20{,}25} = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$ m. Hier ist die Höhe 4,5 m bekannt, gesucht ist die Kathete am Boden. Antwort: Der Fuß muss etwa 2,18 m von der Wand entfernt stehen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $d = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm; $e = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm. Die Flächendiagonale ist $a\sqrt{2}$, die Raumdiagonale $a\sqrt{3}$. Antwort: etwa 8,49 cm und etwa 10,39 cm.
b) Seite $6\sqrt{2}$: $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 72 = 18\sqrt{3} \approx 31{,}18\,\text{cm}^2$. Für ein gleichseitiges Dreieck mit Seite s gilt $A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ und hier $s^2 = 72$. Antwort: Die Fläche beträgt etwa 31,18 cm².
c) 10: ja, schräg. Antwort: Der Stab passt, aber nur schräg entlang der Raumdiagonale, denn er ist länger als jede Kante und jede Flächendiagonale.
d) $e = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$. Man wendet den Satz des Pythagoras zweimal an. Die Raumdiagonale ist immer das $\sqrt{3}$-fache der Kante.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $a^2 = 25 \cdot 9 = 225$, $a = 15$ cm; $b^2 = 25 \cdot 16 = 400$, $b = 20$ cm. Man setzt in den Kathetensatz ein und zieht die Wurzel. Antwort: $a = 15$ cm und $b = 20$ cm.
b) $h_c^2 = 9 \cdot 16 = 144$, $h_c = 12$ cm. Antwort: Die Höhe auf der Hypotenuse ist 12 cm lang.
c) $225 + 400 = 625 = 25^2$. Die Gleichung stimmt, damit sind die Ergebnisse aus a)

bestätigt.
d) $A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150\,\text{cm}^2$; $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150\,\text{cm}^2$. Gleich. Beide Wege liefern 150 cm²; das ist eine gute Kontrolle der Rechnung.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, $\sqrt{6} \approx 2{,}45$, $\sqrt{7} \approx 2{,}65$, $\sqrt{8} \approx 2{,}83$, $\sqrt{9} = 3$. Beim n-ten Dreieck ist die Hypotenuse $\sqrt{n+1}$, denn $(\sqrt{n})^2 + 1^2 = n + 1$.
b) Beim dritten Dreieck: Hypotenuse $\sqrt{4} = 2$. Dann wieder beim achten ($\sqrt{9} = 3$). Ganze Zahlen entstehen nur, wenn $n + 1$ eine Quadratzahl ist.
c) $\frac{1}{2}(1 + 1{,}414 + 1{,}732 + 2 + 2{,}236 + 2{,}449 + 2{,}646 + 2{,}828) \approx \frac{1}{2} \cdot 16{,}305 \approx 8{,}15\,\text{FE}$. Man addiert die acht Flächen $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ für $n = 1$ bis 8. Antwort: Die Gesamtfläche beträgt etwa 8,15 Flächeneinheiten.
d) Katheten 1 und 2: $c = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. Man zeichnet einen rechten Winkel mit den Schenkeln 1 und 2; die Verbindungsstrecke ist dann genau $\sqrt{5}$ lang.