Lösungen zur Klassenarbeit - Quadratwurzeln und reelle Zahlen

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Gesucht ist die nichtnegative Zahl, deren Quadrat 196 ergibt. Wegen $14^2 = 196$ gilt $\sqrt{196} = 14$ (1 P.).

b) Bei einem Bruch zieht man die Wurzel aus Zähler und Nenner getrennt: $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$ (1 P.).

c) Man schreibt $0{,}09 = \frac{9}{100}$; daraus folgt $\sqrt{0{,}09} = \frac{3}{10} = 0{,}3$ (1 P.). Typischer Fehler: $0{,}03$ angeben; doch $0{,}03^2 = 0{,}0009$.

d) Die Wurzel eines Produkts ist das Produkt der Wurzeln: $\sqrt{3^2 \cdot 4^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{4^2} = 3 \cdot 4 = 12$ (1 P.). Kontrolle: $3^2 \cdot 4^2 = 144$ und $\sqrt{144} = 12$.

Antwort: 14; $\frac{5}{7}$; $0{,}3$; 12.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Man sucht im Radikanden die größte Quadratzahl als Faktor: $50 = 25 \cdot 2$. Mit dem Wurzelgesetz $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ wird $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (1 P.). Als Dezimalzahl ist das etwa $5 \cdot 1{,}414 \approx 7{,}07$ (1 P.). Kontrolle: $7{,}07^2 \approx 49{,}98$, also fast 50.

b) Dasselbe Gesetz rückwärts angewendet fasst die beiden Wurzeln zusammen: $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$ (2 P.). Obwohl beide Faktoren irrational sind, ist das Produkt eine natürliche Zahl. Alternativ: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, dann $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 = 6$.

Antwort: $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ und 6.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Der Term hat die Form $(a+b)(a-b)$ mit $a = \sqrt{7}$ und $b = 2$. Nach der dritten binomischen Formel gilt $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (1 P.). Also $(\sqrt{7})^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$ (1 P.). Die gemischten Glieder $2\sqrt{7}$ und $-2\sqrt{7}$ heben sich auf, deshalb verschwindet die Wurzel.

b) Den Nenner rational machen heißt, die Wurzel aus dem Nenner zu entfernen. Man erweitert mit $\sqrt{2}$: $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ (1 P.). Kürzen durch 2 ergibt $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ (1 P.). Kontrolle mit dem Taschenrechner: $6 : 1{,}414 \approx 4{,}24$. Antwort: 3 und $3\sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Einsetzen von $h = 20$ m und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9{,}81}} = \sqrt{4{,}077} \approx 2{,}02$ s (2 P.).

b) Geschwindigkeit: $v = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 2{,}02 \approx 19{,}8$ m/s (1 P.). Für km/h multipliziert man mit $3{,}6$, weil 1 m/s gleich $3{,}6$ km/h ist: $19{,}8 \cdot 3{,}6 \approx 71$ km/h (1 P.).
c) Die Fallformel wird nach h umgestellt: Quadrieren ergibt $t^2 = \frac{2h}{g}$, also $h = \frac{1}{2}gt^2$. Mit $t = 3$ s: $h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 9 \approx 44{,}1$ m (1 P.). Bemerkung: Die $1{,}5$-fache Fallzeit verlangt mehr als die doppelte Höhe, weil t quadriert eingeht. Antwort: etwa $2{,}02$ s, $19{,}8$ m/s bzw. 71 km/h, rund $44{,}1$ m.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Rational ist eine Zahl, die sich als Bruch ganzer Zahlen schreiben lässt; ihre Dezimaldarstellung bricht ab oder ist periodisch. $\sqrt{16} = 4 = \frac{4}{1}$ und ′ sind rational. $\sqrt{30}$ ist irrational, weil 30 keine Quadratzahl ist. Die Zahl $0{,}2020020002\ldots$ hat immer längere Nullblöcke, also keine Periode; sie ist ebenfalls irrational (1 P.).
b) Einschachteln: Ganzzahlig gilt $5^2 = 25 < 30 < 36 = 6^2$. Nun eine Nachkommastelle: $5{,}4^2 = 29{,}16$ ist noch kleiner als 30, $5{,}5^2 = 30{,}25$ bereits größer (1 P.). Folglich $5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5$ (1 P.). Antwort: rational $\sqrt{16}$ und $\frac{3}{7}$; irrational die anderen beiden; $\sqrt{30}$ liegt zwischen $5{,}4$ und $5{,}5$.