Lernzettel - Quadratwurzeln und reelle Zahlen

Klasse: Klasse 9

Mit Quadratwurzeln kehrst du das Quadrieren um. Sie führen zu neuen Zahlen, den irrationalen Zahlen, und zusammen mit den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen.

Einstieg: Die Diagonale, die man nicht messen kann

Ein Fliesenleger legt eine quadratische Fliese mit 1 m Seitenlänge. Wie lang ist ihre Diagonale? Der Satz des Pythagoras sagt: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Gesucht ist also eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt. Die Zahl $1{,}4$ ist zu klein ($1{,}96$), $1{,}5$ zu groß ($2{,}25$), $1{,}41$ fast richtig ($1{,}9881$). Man kann die Zahl immer genauer eingrenzen, aber nie genau als Dezimalzahl hinschreiben. Sie heißt $\sqrt{2}$ und gehört zu den irrationalen Zahlen. Schon die alten Griechen erschraken über diese Entdeckung, weil sie glaubten, alle Längen ließen sich als Brüche schreiben. In diesem Kapitel lernst du, mit solchen Zahlen sicher zu rechnen, sie zu vereinfachen und anzuwenden.

Quadratwurzel

Definition: Quadratwurzel

Die **Quadratwurzel** einer Zahl $a \geq 0$ ist die nicht negative Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt. Man schreibt $\sqrt{a}$; es gilt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ und $\sqrt{a} \geq 0$. Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heißt **Radikand**.

Beispiel 1: Wurzeln ziehen

Berechne $\sqrt{49}$, $\sqrt{0{,}25}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$.

$\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

Regel: Quadratzahlen

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

Diese Werte solltest du auswendig kennen.

Merke: Gegenspieler

Für $a \geq 0$ gilt $(\sqrt{a})^2 = a$. Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$, zum Beispiel

$\sqrt{(-5)^2} = 5$. Aus negativen Zahlen kann man im Bereich der reellen Zahlen keine Wurzel ziehen.

Satz: Die Gleichung $x^2 = a$

Für $a > 0$ hat $x^2 = a$ zwei Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$. Für $a = 0$ gibt es nur $x = 0$, für a keine Lösung.

Beispiel 2: Gleichung

Löse $3x^2 - 12 = 36$.

$+12$: $3x^2 = 48$. $: 3$: $x^2 = 16$.

$x = 4$ oder $x = -4$. Probe: $3 \cdot 16 - 12 = 36$.

Rationale und irrationale Zahlen

Definition: rationale und irrationale Zahlen

Rationale Zahlen lassen sich als Bruch $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p, q, $q \neq 0$ schreiben. Ihre Dezimaldarstellung bricht ab ($0{,}75$) oder wiederholt sich periodisch ($0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$). **Irrationale Zahlen** sind unendliche Dezimalzahlen ohne Periode, zum Beispiel $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ oder π. Beide zusammen bilden die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Merke: Wurzeln aus natürlichen Zahlen

Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist entweder natürlich (wenn der Radikand eine Quadratzahl ist) oder irrational. $\sqrt{16} = 4$ ist rational, $\sqrt{20}$ ist irrational. Die Zahlenbereiche $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ liegen ineinander.

So gehst du vor: Intervallschachtelung

1. Suche die Quadratzahlen vor und hinter dem Radikanden.
2. Probiere Zahlen mit einer Nachkommastelle und grenze ein.
3. Wiederhole mit zwei Nachkommastellen.
4. In jedem Schritt wird das Intervall zehnmal kleiner.

Beispiel 3: Einschachteln

Grenze $\sqrt{10}$ ohne Taschenrechner ein.

$3^2 = 9$ und $4^2 = 16$, also 3.

$3{,}1^2 = 9{,}61$ (zu klein), $3{,}2^2 = 10{,}24$ (zu groß). Weiter: $3{,}16^2 = 9{,}9856$, $3{,}17^2 = 10{,}0489$.

Also $3{,}16$. Der Taschenrechner zeigt nur eine Näherung.

Wurzelgesetze

Satz: Wurzelgesetze

Für $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (mit $b > 0$).

Zahlenmengen im Überblick

Die Zahlen wachsen schrittweise: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zum Zählen, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit den negativen Zahlen, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit allen Brüchen. Die Wurzel $\sqrt{2}$ und die Kreiszahl π liegen außerhalb: Sie sind irrational. Alle diese Zahlen zusammen heißen reelle Zahlen $\mathbb{R}$, und jede reelle Zahl hat einen Platz auf der Zahlengeraden. Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegen immer unendlich viele rationale und unendlich viele irrationale Zahlen.

Beispiel 9: Zahlen zuordnen

Ordne -4, $\frac{3}{5}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{11}$ und π den Zahlenmengen zu.

$-4 \in \mathbb{Z}$, $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{11}$ und π sind irrational, also nur in $\mathbb{R}$. Alle fünf Zahlen liegen in $\mathbb{R}$.

Dritte Wurzel und höhere Wurzeln

Die dritte Wurzel $\sqrt[3]{a}$ fragt: Welche Zahl hoch drei ergibt a? So ist $\sqrt[3]{27} = 3$, weil $3^3 = 27$. Anders als bei der Quadratwurzel kann man auch aus negativen Zahlen die dritte Wurzel ziehen: $\sqrt[3]{-8} = -2$. Die dritte Wurzel braucht man bei Würfeln: Ein Würfel mit dem Volumen V hat die Kantenlänge $a = \sqrt[3]{V}$. Auf dem Taschenrechner nutzt du die Taste $\sqrt[x]{}$ oder die Potenz $V^{1/3}$.

Beispiel 10: Würfelkante

Ein Würfel hat das Volumen $125\,\text{cm}^3$. Wie lang ist die Kante? Und bei $100\,\text{cm}^3$?

$a = \sqrt[3]{125} = 5$ cm. Bei $100\,\text{cm}^3$: $a = \sqrt[3]{100} \approx 4{,}64$ cm, denn $4{,}6^3 = 97{,}3$ und $4{,}7^3 = 103{,}8$.

Mit Wurzeln rechnen: Strategie

Gehe bei Wurzeltermen in dieser Reihenfolge vor: Zuerst teilweise Wurzelziehen, damit gleichartige Wurzeln erkennbar werden. Dann Wurzeln zusammenfassen. Bei Klammern

die binomischen Formeln nutzen. Bei Brüchen den Nenner rational machen. Zum Schluss, wenn nötig, einen Näherungswert mit dem Taschenrechner berechnen. Das exakte Ergebnis (zum Beispiel $5\sqrt{2}$) ist genauer als die Dezimalzahl $7{,}07$ und sollte als Zwischenergebnis stehen bleiben.

Beispiel 11: Termumformung

Vereinfache $(\sqrt{18}+\sqrt{2})^2$.

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, also $(3\sqrt{2}+\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2})^2=16\cdot 2=32$. Mit Binomi: $18+2\sqrt{36}+2=18+12+2=32$.

Häufige Fehler und Proben

Die Wurzel ist keine lineare Rechenoperation. Aus $\sqrt{9+16}=5$ darf man nicht $\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$ machen. Ebenso gilt $\sqrt{a^2}=|a|$ und nicht einfach a: $\sqrt{(-3)^2}=3$. Bei $x^2=a$ gibt es zwei Lösungen, bei $\sqrt{a}$ nur eine, nämlich die positive. Mit einer Probe auf dem Taschenrechner erkennst du viele Fehler: Berechne den exakten Term und die vereinfachte Form und vergleiche beide Dezimalwerte.

Beispiel 12: Probe mit Näherung

Stimmt $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$?

$\sqrt{72}\approx 8{,}485$ und $6\sqrt{2}\approx 6\cdot 1{,}4142=8{,}485$. Beide Werte sind gleich, die Umformung ist richtig. Diese Probe ersetzt keinen Beweis, aber sie entdeckt fast jeden Rechenfehler sofort, und sie kostet nur wenige Sekunden.

Wusstest du?

Der Legende nach wurde der Pythagoreer Hippasos von Metapont verspottet oder sogar bestraft, weil er die Irrationalität von $\sqrt{2}$ entdeckt hatte. Heute kennt man Milliarden Nachkommastellen von $\sqrt{2}$, und Computer berechnen sie mit Verfahren wie dem von Heron von Alexandria.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Quadratwurzel: $\sqrt{a}\geq 0$ mit $(\sqrt{a})^2=a$ für $a\geq 0$; $x^2=a$ hat die Lösungen $\pm\sqrt{a}$.
- Rationale Zahlen sind Brüche (abbrechende oder periodische Dezimalbrüche), irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ und π nicht.
- Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
- Wurzelgesetze: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$; aber $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
- Teilweise Wurzelziehen: $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=4\sqrt{3}$.
- Binomische Formeln gelten auch mit Wurzeln; $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$.

- Nenner rational machen: $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$ mit $a+\sqrt{b}$ erweitern.
- Näherung durch Einschachteln, Heron-Verfahren oder Taschenrechner; Wurzelgleichungen immer mit Probe.

Achtung

Für Summen und Differenzen gibt es kein solches Gesetz: $\sqrt{9+16} = 5$, aber $\sqrt{9}+\sqrt{16} = 7$. Das Wurzelzeichen liefert nur den nicht negativen Wert: $\sqrt{16} = 4$, nicht ± 4. Nur die Gleichung $x^2 = 16$ hat zwei Lösungen. $\sqrt{x^2} = x$ gilt nur für $x \geq 0$; allgemein ist $\sqrt{x^2} = |x|$.

So gehst du vor: Teilweise Wurzelziehen

1. Zerlege den Radikanden in eine Quadratzahl und einen Rest.
2. Ziehe die Wurzel aus der Quadratzahl.
3. Schreibe das Ergebnis als Produkt $k\sqrt{m}$.

Beispiel 4: Teilweise Wurzelziehen

Vereinfache $\sqrt{50}$ und $\sqrt{48}$.

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$.

Beispiel 5: Wurzeln zusammenfassen

Berechne $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$, $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ und $\sqrt{12}\cdot\sqrt{27}$.

$3\sqrt{5}+2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

$\sqrt{8}+\sqrt{18} = 2\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

$\sqrt{12}\cdot\sqrt{27} = \sqrt{324} = 18$, oder $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} = 18$.

Beispiel 6: Binomische Formeln mit Wurzeln

Berechne $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$ und $(\sqrt{5}+2)^2$.

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 3-1 = 2$. $(\sqrt{5}+2)^2 = 5+4\sqrt{5}+4 = 9+4\sqrt{5}$.

Beispiel 7: Nenner rational machen

Schreibe $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ohne Wurzel im Nenner.

Erweitere mit $\sqrt{3}$: $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

Beispiel 8: Sachaufgaben

Ein quadratisches Grundstück hat 900 m². Ein quadratisches Beet soll 12,5 m² groß sein. Wie lang sind die Seiten?

Grundstück: $a = \sqrt{900} = 30$ m, Zaun $4 \cdot 30 = 120$ m.

Beet: $a = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$ m. Probe: $3{,}54^2 = 12{,}5316$. Antwort: Eine Seite des Beets ist etwa 3,54 m lang.

Hinweis

Es gibt zwei Arten, ein Ergebnis anzugeben. Der **exakte Wert** bleibt in Wurzelform, zum Beispiel $2\sqrt{5}$. Der **Näherungswert** ist gerundet, zum Beispiel $4{,}47$. Verlangt die Aufgabe „exakt“, darfst du nicht runden. Schreibe $\approx$, wenn du gerundet hast. Auch $\sqrt{2}$ lässt sich zeichnen: als Diagonale des Einheitsquadrats.

Zum Einstieg: Ein Quadrat mit 2 cm² Fläche

Zeichne ein Quadrat mit 1 cm Seitenlänge und seine Diagonale. Über dieser Diagonale kannst du ein neues Quadrat zeichnen, das genau doppelt so groß ist, also 2 cm² Fläche hat. Wie lang ist seine Seite? Miss nach: Du erhältst etwa 1,4 cm. Ganz genau ist es die Zahl, deren Quadrat 2 ergibt, also $\sqrt{2}$. Egal wie genau du misst, du findest keinen Bruch, der genau passt. So entdeckten schon die Griechen die irrationalen Zahlen.

Beispiel 9

Vereinfache $\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$ und gib das Ergebnis exakt und gerundet an.

Zuerst ziehen wir bei jedem Summanden teilweise die Wurzel. Dazu suchen wir jeweils den größten Quadratzahlfaktor: $18 = 9 \cdot 2$, $32 = 16 \cdot 2$ und $8 = 4 \cdot 2$. Damit gilt $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ und $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Jetzt haben alle Summanden denselben Radikanden und wir können die Vorfaktoren zusammenfassen: $3 + 4 - 2 = 5$. Das Ergebnis ist also $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$.

Häufige Fehler

Der häufigste Fehler ist, die Wurzel einer Summe aufzuteilen: $\sqrt{9+16}$ ist 5 und nicht 7. Ein zweiter Fehler betrifft Gleichungen wie $x^2 = 49$: Hier gibt es zwei Lösungen, nämlich 7 und -7. Das Wurzelzeichen selbst liefert aber immer nur die positive Zahl, $\sqrt{49} = 7$. Achte außerdem darauf, dass unter der Wurzel keine negative Zahl stehen

darf.

So gehst du vor: Wurzelterme vereinfachen

1. Zerlege jeden Radikanden in einen möglichst großen Quadratzahlfaktor und einen Restfaktor.
2. Ziehe die Wurzel aus dem Quadratzahlfaktor und schreibe sie als Vorfaktor vor die Wurzel.
3. Fasse nur Wurzeln mit gleichem Radikanden zusammen, indem du die Vorfaktoren addierst oder subtrahierst.
4. Steht eine Wurzel im Nenner, erweitere den Bruch so, dass der Nenner rational wird.
5. Kontrolliere das Ergebnis mit dem Taschenrechner, indem du Ausgangsterm und Ergebnis als Dezimalzahl vergleichst.

Schon gewusst?

Die Zahl π ist ebenfalls irrational, und Computer haben bereits Billionen ihrer Nachkommastellen berechnet, ohne je eine Periode zu finden. Das Wurzelzeichen entstand übrigens aus einem verzierten kleinen r, dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes radix, das Wurzel bedeutet.

Ottos Tipp

Lerne die Quadratzahlen bis 15^2 auswendig. Bei $\sqrt{x}$ suchst du die nächstkleinere und die nächstgrößere Quadratzahl. So prüfst du jedes Ergebnis des Taschenrechners: $\sqrt{50}$ muss zwischen 7 und 8 liegen, weil 49 gilt. Runde nicht zu früh.