Arbeitsblatt - Quadratwurzeln und reelle Zahlen

Klasse: Klasse 9 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Wurzeln ziehen

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist die nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt{64}$

b) $\sqrt{0{,}49}$

c) $\sqrt{\frac{9}{16}}$

d) $\sqrt{169}$

e) $\sqrt{0{,}0004}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Quadratzahlen

Wer die Quadratzahlen kennt, rechnet mit Wurzeln viel schneller.

n	11	12	13	14	15	16	25
n^2	?	?	?	?	?	?	?

a) Ergänze die Quadratzahlen.

b) Welche Zahlen sind keine Quadratzahlen: 80, 81, 121, 150, 225, 1000?

c) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt $\sqrt{200}$?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Einschachteln und Taschenrechner

Ist a keine Quadratzahl, ist $\sqrt{a}$ irrational. Du kannst die Wurzel durch Einschachteln eingrenzen.

a) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen $\sqrt{20}$, $\sqrt{7}$ und $\sqrt{50}$?

b) Schachtele $\sqrt{10}$ auf eine Nachkommastelle ein: $3{,}1^2$ und $3{,}2^2$.

c) Bestimme $\sqrt{20}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{50}$ und $\sqrt{200}$ mit dem Taschenrechner (zwei Nachkommastellen).

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Reinquadratische Gleichungen

Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ hat die zwei Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$.

a) $x^2 = 144$
b) $x^2 = 2{,}25$
c) $x^2 = 5$
d) $2x^2 = 50$
e) $x^2 + 9 = 0$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Wurzelgesetze

Es gilt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ für $a, b \geq 0$, aber $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Vereinfache.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
b) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
c) $\sqrt{4 \cdot 25}$
d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$
e) Zeige am Beispiel $a = 9, b = 16$, dass $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Teilweise Wurzelziehen

Zerlege den Radikanden in einen Quadratzahl-Faktor und einen Rest:
$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$.

a) $\sqrt{48}$
b) $\sqrt{75}$
c) $\sqrt{200}$
d) $\sqrt{98}$
e) $\sqrt{0{,}12} \cdot \sqrt{100}$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Wurzeln zusammenfassen

Gleichartige Wurzeln addierst du wie Variablen: $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$. Manchmal musst du zuerst teilweise Wurzelziehen.

a) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$

b) $4\sqrt{2} - \sqrt{8}$
c) $\sqrt{27} + \sqrt{12}$
d) $\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Binomische Formeln mit Wurzeln

Die binomischen Formeln gelten auch für Wurzeln. Multipliziere aus und vereinfache.

a) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$
b) $(\sqrt{3} + 1)^2$
c) $(2 - \sqrt{2})^2$
d) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Nenner rational machen

Brüche mit Wurzeln im Nenner erweiterst du so, dass der Nenner rational wird: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Bei $a - \sqrt{b}$ hilft die dritte binomische Formel.

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$
b) $\frac{10}{\sqrt{5}}$
c) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$
d) $\frac{3}{\sqrt{7}+2}$

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Rational oder irrational?

Rationale Zahlen lassen sich als Bruch schreiben und haben abbrechende oder periodische Dezimalbrüche. Irrationale Zahlen nicht.

Zahl	rational?	Begründung
$\sqrt{9}$	?	?
$\sqrt{2}$	?	?
$0{,}\overline{3}$	?	?
π	?	?
$-\frac{5}{7}$	?	?
$0{,}1010010001\ldots$	?	?

a) Fülle die Tabelle aus.

b) Nenne eine rationale Zahl zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.
c) Ist $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ rational?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Das Quadratgrundstück

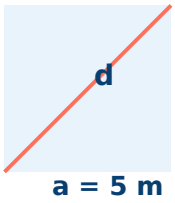
Ein quadratisches Grundstück ist $500\,\text{m}^2$ groß. Der Zaun kostet 24 € pro Meter.

a) Berechne die Seitenlänge.
b) Berechne den Umfang und die Zaunkosten.
c) Ein zweites Quadrat hat die doppelte Fläche ($1000\,\text{m}^2$). Um welchen Faktor ist die Seite länger?
d) Wie lang muss die Seite sein, damit die Fläche 1 Hektar ($10\,000\,\text{m}^2$) beträgt?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Diagonale der Fliese

Eine quadratische Fliese hat die Seitenlänge a. Die Diagonale ist $d = a\sqrt{2}$.



a) Berechne d für $a = 5$ m.
b) Eine Fliese hat 30 cm Seitenlänge. Wie lang ist die Diagonale?
c) Die Diagonale einer Fliese ist 50 cm. Wie lang ist die Seite? (Nenner rational machen)
d) Wie groß ist die Fläche der Fliese aus c)?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Das Fadenpendel

Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels der Länge l ist $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ mit $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$.

l in m	1	0,25	2
T in s	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle (zwei Nachkommastellen).
b) Was passiert mit T, wenn die Länge l auf ein Viertel verkürzt wird?
c) Wie lang muss das Pendel sein, damit $T = 2$ s beträgt? Stelle die Formel um.
d) Auf dem Mond ist $g = 1{,}62\,\text{m/s}^2$. Wie groß ist T bei $l = 1$ m?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Die Fallzeit

Ein Gegenstand fällt aus der Höhe h in der Zeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ mit $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ (ohne Luftwiderstand).

Fall	Höhe
Sprung vom Dreimeterbrett	3 m
Sprung vom Zehnmeterturm	10 m
Fall vom Kirchturm	45 m

a) Berechne die Fallzeiten.
b) Mit welcher Geschwindigkeit $v = g \cdot t$ taucht der Springer vom Zehnmeterturm ein (in m/s und km/h)?
c) Aus welcher Höhe fällt ein Stein in 3 s?
d) Warum dauert der Fall aus 40 m nur etwa doppelt so lange wie aus 10 m?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Zwei Quadrate

Zwei quadratische Beete haben die Flächen $50\,\mathrm{m^2}$ und $72\,\mathrm{m^2}$. Die Seiten sollen exakt mit Wurzeln angegeben werden.

a) Gib die Seitenlängen vereinfacht an.
b) Berechne die Summe der Seiten.
c) Berechne den Unterschied der Seitenlängen und das Produkt der Seiten.
d) Wie groß ist die Fläche eines Quadrats, dessen Seite so lang ist wie die Summe der beiden Seiten?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Kreis oder Quadrat?

Ein Rasenstück soll $100\,\mathrm{m^2}$ groß sein. Du kannst es kreisförmig oder quadratisch anlegen. Der Rasenkantenstein kostet 8 € pro Meter.

a) Berechne Radius und Umfang des Kreises.
b) Berechne Seite und Umfang des Quadrats.
c) Welche Form braucht weniger Randstein, und wie viel spart sie?
d) Berechne die Kosten für beide Formen.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Sichtweite vom Turm

Von einem erhöhten Standpunkt der Höhe h (in m) sieht man bei guter Sicht auf dem Meer etwa $d \approx 3{,}57 \cdot \sqrt{h}$ Kilometer weit.

Standort	Höhe
Leuchtturm	36 m
Funkturm	100 m
Aussichtsplattform	324 m
Augenhöhe am Strand	1,6 m

a) Berechne die Sichtweite für alle vier Standorte.
b) Wie hoch muss der Standort sein, damit man 50 km weit sieht?
c) Um welchen Faktor muss die Höhe wachsen, damit man doppelt so weit sieht?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Das Heron-Verfahren

Das Heron-Verfahren nähert $\sqrt{a}$ an: Man startet mit einem Schätzwert x_0 und berechnet $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Berechne $\sqrt{2}$ mit $x_0 = 1{,}5$.

n	0	1	2	3
x_n	1,5	?	?	?

a) Berechne x_1, x_2 und x_3 (sechs Nachkommastellen).
b) Vergleiche mit $\sqrt{2}$ vom Taschenrechner.
c) Berechne x_1 für $\sqrt{10}$ mit $x_0 = 3$.
d) Warum liegt x_{n+1} immer zwischen x_n und $\frac{a}{x_n}$?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Wurzelgleichungen

Bei einer Wurzelgleichung isolierst du die Wurzel und quadrierst. Weil Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, machst du immer die Probe.

a) $\sqrt{2x - 1} = 3$
b) $\sqrt{x} + 3 = 7$
c) $\sqrt{x + 5} = x - 1$
d) $\sqrt{x} = -2$

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist

Die Griechen entdeckten, dass die Diagonale eines Einheitsquadrats nicht als Bruch geschrieben werden kann. Du folgst ihrem Widerspruchsbeweis.

a) Nimm an, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit gekürztem Bruch. Zeige $p^2 = 2q^2$.
b) Folgere, dass p und dann auch q gerade sind. Was ist der Widerspruch?
c) Schachtele $\sqrt{2}$ mit $1{,}41$ und $1{,}42$ ein.

d) Berechne $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$. Ist $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$?