Lösungen - Quadratwurzeln und reelle Zahlen

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

Bei jeder Teilaufgabe suchst du die nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert den Radikanden ergibt. Die Probe durch Quadrieren zeigt, ob das Ergebnis stimmt.
a) $8^2 = 64$, also $\sqrt{64} = 8$.
b) $0{,}7^2 = 0{,}49$, also $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. Bei Dezimalzahlen halbiert sich die Anzahl der Nachkommastellen.
c) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Man zieht die Wurzel aus Zähler und Nenner getrennt.
d) $13^2 = 169$, also $\sqrt{169} = 13$.
e) $0{,}02^2 = 0{,}0004$, also $\sqrt{0{,}0004} = 0{,}02$. Aus vier Nachkommastellen werden zwei.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $121, 144, 169, 196, 225, 256, 625$. Diese Quadratzahlen sollte man auswendig kennen; jede entsteht durch $n \cdot n$.
b) Keine Quadratzahlen: 80, 150, 1000. Quadratzahlen sind $81 = 9^2$, $121 = 11^2$, $225 = 15^2$. Eine Quadratzahl ist das Quadrat einer natürlichen Zahl. Zwischen $8^2 = 64$ und $9^2 = 81$ liegt die 80, also ist sie keine Quadratzahl; ebenso liegt 150 zwischen 144 und 169.
c) $14^2 = 196$, also 14 ($\sqrt{200} \approx 14{,}14$). Man sucht die beiden benachbarten Quadratzahlen, zwischen denen 200 liegt. Die Wurzel liegt dann zwischen deren Wurzeln.

Lösung zu Aufgabe 3

a) 4; 2; 7. Man sucht jeweils die nächstkleinere und die nächstgrößere Quadratzahl: 16, 4 und 49.
b) $3{,}1^2 = 9{,}61$, also $3{,}1$. Beim Einschachteln quadriert man Dezimalzahlen mit einer Nachkommastelle, bis der Radikand dazwischen liegt. Der nächste Schritt würde zwei Nachkommastellen liefern.
c) $\sqrt{20} \approx 4{,}47$; $\sqrt{7} \approx 2{,}65$; $\sqrt{50} \approx 7{,}07$; $\sqrt{200} \approx 14{,}14$. Die Taschenrechnerwerte liegen jeweils in den Intervallen aus a) und b), das ist eine gute Kontrolle.

Lösung zu Aufgabe 4

Für $x^2 = a$ mit $a > 0$ gibt es zwei Lösungen, denn sowohl $\sqrt{a}$ als auch $-\sqrt{a}$ ergeben quadriert a.

a) $x = \pm 12$. Probe: $12^2 = 144$ und $(-12)^2 = 144$.
b) $x = \pm 1{,}5$.
c) $x = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2{,}236$. Da 5 keine Quadratzahl ist, gibt man die Lösungen exakt mit Wurzel an.
d) $x^2 = 25$, also $x = \pm 5$. Zuerst wird durch 2 geteilt, dann die Wurzel gezogen.
e) $x^2 = -9$: keine Lösung. Ein Quadrat ist nie negativ, deshalb ist die Lösungsmenge leer.

Lösung zu Aufgabe 5

Man fasst zuerst mit den Wurzelgesetzen zu einer einzigen Wurzel zusammen und zieht dann die Wurzel aus der Quadratzahl.
a) $\sqrt{36} = 6$. denn $3 \cdot 12 = 36$.
b) $\sqrt{36} = 6$. denn $72 : 2 = 36$.
c) $2 \cdot 5 = 10$. Wurzel aus einem Produkt ist das Produkt der Wurzeln.
d) $\sqrt{36} = 6$.
e) $\sqrt{25} = 5$, aber $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Dieses Beispiel zeigt: Bei Summen darf man die Wurzel nicht aufteilen.

Lösung zu Aufgabe 6

Man sucht die größte Quadratzahl, die im Radikanden als Faktor steckt, und zieht nur aus ihr die Wurzel.
a) $\sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$. Die Quadratzahl 16 ist der größte passende Faktor.
b) $\sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$.
c) $\sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$. Hier ist 100 der Quadratzahlfaktor.
d) $\sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$.
e) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$. Zuerst nach dem Wurzelgesetz zusammenfassen: $\sqrt{0{,}12 \cdot 100} = \sqrt{12}$, danach teilweise Wurzel ziehen.

Lösung zu Aufgabe 7

Nur Wurzeln mit gleichem Radikanden lassen sich zusammenfassen, genau wie gleichartige Terme $3x + 2x = 5x$.
a) $(3 + 2 - 1)\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94$. Die Vorfaktoren werden addiert bzw. subtrahiert.
b) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. Erst nach dem teilweisen Wurzelziehen haben beide Summanden denselben Radikanden.
c) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$. Es gilt $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3}$ und $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3}$.
d) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$. Alle drei Wurzeln werden auf $\sqrt{2}$ zurückgeführt.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Dritte binomische Formel: $5 - 4 = 1$. Es gilt $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ und $(\sqrt{5})^2 = 5$. Das Ergebnis ist rational.
b) $3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46$. Nach der ersten binomischen Formel: $(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2$.
c) $4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2} \approx 0{,}34$. Nach der zweiten binomischen Formel: $2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$.
d) $7 - 3 = 4$. Wieder die dritte binomische Formel; die Wurzeln verschwinden vollständig.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$. Man erweitert mit $\sqrt{3}$, denn $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$; anschließend wird gekürzt.
b) $\frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$. Man erweitert mit $\sqrt{5}$ und kürzt 10 gegen 5.
c) $\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5} + 2 \approx 4{,}24$. Man erweitert mit $\sqrt{5} + 2$, damit im Nenner die dritte binomische Formel entsteht und die Wurzel verschwindet.
d) $\frac{3(\sqrt{7}-2)}{7-4} = \sqrt{7} - 2 \approx 0{,}65$. Hier erweitert man mit $\sqrt{7} - 2$; der Nenner wird $7 - 4 = 3$ und kürzt sich gegen die 3 im Zähler.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\sqrt{9} = 3$: rational. $\sqrt{2}$: irrational (nicht abbrechend, nicht periodisch). $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$: rational. π: irrational. $-\frac{5}{7}$: rational (Bruch). $0{,}1010010001\ldots$: irrational (nicht periodisch, immer längere Nullfolgen). Entscheidend ist die Dezimaldarstellung: abbrechend oder periodisch bedeutet rational, sonst irrational.
b) $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$; zum Beispiel $1{,}5 = \frac{3}{2}$. Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegen immer unendlich viele rationale Zahlen; eine einfache Wahl ist ein Wert mit einer Nachkommastelle dazwischen.
c) $\sqrt{16} = 4$: ja, rational. Da 16 eine Quadratzahl ist, ist die Wurzel eine ganze Zahl und damit rational.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $a = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \approx 22{,}36$ m. Bei einem Quadrat gilt $A = a^2$, also $a = \sqrt{A}$. Antwort: Eine Seite ist etwa 22,36 m lang.
b) $U = 4a \approx 89{,}44$ m; Kosten $\approx 2146{,}56$ €. Den Umfang multipliziert man mit dem Meterpreis. Antwort: Der Zaun kostet etwa 2146,56 €.
c) $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{500}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. Verdoppelt man die Fläche, so wächst die Seite nur mit dem Faktor $\sqrt{2}$, also um etwa 41 %.
d) $a = \sqrt{10\,000} = 100$ m. Ein Hektar sind $10\,000\,\mathrm{m}^2$. Antwort: Die Seite ist genau 100 m

lang.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $d = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ m. Antwort: Die Diagonale ist etwa 7,07 m lang.
b) $d = 30\sqrt{2} \approx 42{,}4$ cm. Antwort: Die Diagonale der Fliese ist etwa 42,4 cm lang.
c) $a = \frac{50}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2} \approx 35{,}4$ cm. Man stellt $d = a\sqrt{2}$ nach a um und macht den Nenner rational. Antwort: Die Seite ist etwa 35,4 cm lang.
d) $A = a^2 = (25\sqrt{2})^2 = 1250\,\text{cm}^2$; Kontrolle: $\frac{d^2}{2} = \frac{2500}{2} = 1250\,\text{cm}^2$. Beide Wege liefern dieselbe Fläche, die Rechnung ist also bestätigt.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $T(1) = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} \approx 2{,}01$ s; $T(0{,}25) \approx 1{,}00$ s; $T(2) \approx 2{,}84$ s. Man setzt jede Länge in die Formel ein; zuerst wird der Bruch berechnet, dann die Wurzel, dann mit 2π multipliziert.
b) Die Schwingungsdauer halbiert sich, denn $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ($2{,}01$ s $\to 1{,}00$ s). Viertelt man die Länge, so halbiert sich die Zeit, weil die Länge unter der Wurzel steht.
c) $l = g \cdot (\frac{T}{2\pi})^2 = 9{,}81 \cdot (\frac{2}{2\pi})^2 \approx 0{,}994$ m. Man stellt nach l um: durch 2π teilen, quadrieren, mit g multiplizieren. Antwort: Ein Sekundenpendel ($T = 2$ s) ist knapp 1 m lang.
d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1{,}62}} \approx 4{,}94$ s. Auf dem Mond ist g kleiner, deshalb schwingt das Pendel langsamer. Antwort: etwa 4,94 s.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\sqrt{\frac{6}{9{,}81}} \approx 0{,}78$ s; $\sqrt{\frac{20}{9{,}81}} \approx 1{,}43$ s; $\sqrt{\frac{90}{9{,}81}} \approx 3{,}03$ s. Man setzt die Höhen ein und rundet auf Hundertstel. Antwort: etwa 0,78 s, 1,43 s und 3,03 s.
b) $v = 9{,}81 \cdot 1{,}43 \approx 14{,}0$ m/s ≈ 50 km/h. Beim Zehnmeterturm beträgt die Fallzeit 1,43 s. Antwort: Man trifft mit etwa 50 km/h auf das Wasser.
c) $h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3^2 \approx 44{,}1$ m. Man stellt die Formel nach h um: $h = \frac{1}{2}gt^2$. Antwort: Der Gegenstand fiel aus etwa 44 m Höhe.
d) Die Zeit hängt von der Wurzel der Höhe ab: Das Vierfache der Höhe ergibt nur $\sqrt{4} = 2$-mal so viel Zeit. Deshalb dauert der Fall vom 45-m-Kirchturm nicht 15-mal so lang wie vom 3-m-Brett, sondern nur knapp viermal so lang.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ m; $b = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ m. Man zerlegt $50 = 25 \cdot 2$ und $72 = 36 \cdot 2$ und zieht teilweise die Wurzel.
b) $5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2} \approx 15{,}56$ m. Beide Seiten enthalten $\sqrt{2}$, deshalb lassen sie sich

zusammenfassen.
c) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ m; Produkt $5\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 30 \cdot 2 = 60\,\text{m}^2$. Beim Produkt gilt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$; das Ergebnis ist eine ganze Zahl.
d) $(11\sqrt{2})^2 = 121 \cdot 2 = 242\,\text{m}^2$. Ein Quadrat mit der Summe der Seiten hat also 242 m², deutlich mehr als $50 + 72 = 122$ m².

Lösung zu Aufgabe 16

a) $r = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5{,}64$ m; $U = 2\pi r \approx 35{,}45$ m. Aus $A = \pi r^2$ folgt $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Antwort: Radius etwa 5,64 m, Umfang etwa 35,45 m.
b) $a = \sqrt{100} = 10$ m; $U = 40$ m. Antwort: Seite 10 m, Umfang 40 m.
c) Der Kreis: $40 - 35{,}45 = 4{,}55$ m weniger. Bei gleicher Fläche hat der Kreis den kleinsten Umfang aller Figuren.
d) Kreis $\approx 283{,}60$ €, Quadrat 320 €. Man multipliziert die Umfänge mit 8 €. Antwort: Der Kreis ist etwa 36 € günstiger.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $3{,}57 \cdot 6 = 21{,}4$ km; $3{,}57 \cdot 10 = 35{,}7$ km; $3{,}57 \cdot 18 = 64{,}3$ km; $3{,}57 \cdot \sqrt{1{,}6} \approx 4{,}5$ km. Man zieht zuerst die Wurzel aus der Höhe ($\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{324} = 18$) und multipliziert dann mit 3,57.
b) $\sqrt{h} = \frac{50}{3{,}57} \approx 14{,}0$, $h \approx 196$ m. Man stellt nach $\sqrt{h}$ um und quadriert anschließend. Antwort: Man müsste etwa 196 m hoch stehen.
c) Damit d doppelt so groß wird, muss $\sqrt{h}$ doppelt so groß sein, also h viermal so groß. Beispiel: Vom Funkturm (100 m) sieht man 35,7 km weit, aus 400 m Höhe doppelt so weit.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $x_1 = \frac{1}{2}(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}) \approx 1{,}416667$; $x_2 \approx 1{,}414216$; $x_3 \approx 1{,}414214$. Jeder Schritt bildet den Mittelwert aus x_n und $\frac{2}{x_n}$; die Werte nähern sich sehr schnell $\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$. Schon x_3 stimmt auf sechs Stellen. Die Anzahl der richtigen Stellen verdoppelt sich ungefähr bei jedem Schritt.
c) $x_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) \approx 3{,}1667$; $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$. Mit dem Startwert 3 liefert schon der erste Schritt zwei richtige Nachkommastellen.
d) Ist x_n zu klein, ist $\frac{a}{x_n}$ zu groß und umgekehrt (ihr Produkt ist a). Der Mittelwert liegt dazwischen und ist besser. Deshalb wird die Näherung mit jedem Schritt besser.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $2x - 1 = 9$, $x = 5$. Probe: $\sqrt{9} = 3$. Man quadriert beide Seiten und löst die lineare Gleichung. Die Probe bestätigt die Lösung.

b) $\sqrt{x} = 4$, $x = 16$. Probe: $4 + 3 = 7$. Zuerst wird die Wurzel isoliert, indem man 3 subtrahiert; dann wird quadriert.
c) $x + 5 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x = 1{,}5 \pm 2{,}5$: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Probe: $x = 4$: $\sqrt{9} = 3 = 4 - 1$ richtig; $x = -1$: $\sqrt{4} = 2 \neq -2$, also falsch. Lösung: $x = 4$. Durch das Quadrieren ist eine Scheinlösung entstanden. Erst die Probe zeigt, dass nur $x = 4$ die Gleichung erfüllt.
d) Eine Wurzel ist nie negativ: keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer; Quadrieren würde die falsche Lösung $x = 4$ liefern.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Quadrieren von $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ergibt $2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = 2q^2$. Danach multipliziert man mit q^2.
b) p^2 ist gerade, also ist p gerade: $p = 2k$. Dann $4k^2 = 2q^2$, $q^2 = 2k^2$, also ist auch q gerade. Der Bruch war aber gekürzt, p und q können nicht beide gerade sein: Widerspruch. Also ist $\sqrt{2}$ irrational. Wäre p ungerade, wäre auch p^2 ungerade. Dieser Widerspruch zur Annahme beweist die Behauptung.
c) $1{,}41^2 = 1{,}9881$, also $1{,}41$. Man quadriert die Grenzen und vergleicht mit 2.
d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6} \approx 9{,}90$, das ist nicht 5. Also $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$ ($3{,}15$ gegen $2{,}24$). Diese Rechnung zeigt erneut, dass man bei Summen die Wurzel nicht aufteilen darf.