Lösungen zur Klassenarbeit - Quadratische Gleichungen

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Die Gleichung steht schon in Normalform mit $p = -8$ und $q = 15$. pq-Formel: $x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$, also $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$ (2 P.). Probe mit dem Satz von Vieta: $5 + 3 = 8 = -p$ und $5 \cdot 3 = 15 = q$. Beide Bedingungen sind erfüllt.
b) Hier fehlt das absolute Glied, deshalb ist Ausklammern schneller als jede Formel: $2x^2 - 6x = 2x(x - 3) = 0$ (1 P.). Ein Produkt ist genau dann null, wenn ein Faktor null ist: $2x = 0$ liefert $x_1 = 0$, $x - 3 = 0$ liefert $x_2 = 3$ (1 P.). Häufiger Fehler: durch x teilen, dann geht die Lösung 0 verloren. Antwort: $\{3; 5\}$ und $\{0; 3\}$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Die Gleichung $x^2 = 81$ ist reinquadratisch. Gesucht sind alle Zahlen, deren Quadrat 81 ist; das sind 9 und -9, denn auch $(-9)^2 = 81$ (2 P.). Es gibt also zwei Lösungen, $L = \{-9; 9\}$. Wer nur 9 angibt, erhält einen Punkt.
b) Für $x^2 + 2x + 3 = 0$ gilt $p = 2$, $q = 3$. Die Diskriminante unter der Wurzel der pq-Formel ist $D = (\frac{p}{2})^2 - q = 1 - 3 = -2$ (1 P.). Weil $D < 0$ ist, lässt sich keine reelle Wurzel ziehen: Die Gleichung hat keine Lösung, $L = \{\}$ (1 P.). Geometrisch: Die Parabel $y = (x + 1)^2 + 2$ liegt ganz oberhalb der x-Achse. Antwort: zwei Lösungen bzw. keine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Achtung: Der Satz vom Nullprodukt gilt nur, wenn rechts 0 steht. Deshalb wird zuerst ausmultipliziert: $(x - 2)(x + 4) = x^2 + 4x - 2x - 8 = x^2 + 2x - 8$ (1 P.). Aus $x^2 + 2x - 8 = 7$ wird nach Subtraktion von 7 die Normalform $x^2 + 2x - 15 = 0$ (1 P.). pq-Formel mit $p = 2$, $q = -15$: $x = -1 \pm \sqrt{1 + 15} = -1 \pm 4$, also $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$ (1 P.). Probe (1 P.): Für $x = 3$ ergibt sich $(3 - 2)(3 + 4) = 1 \cdot 7 = 7$. Für $x = -5$ ergibt sich $(-7) \cdot (-1) = 7$. Beide Lösungen erfüllen die Ausgangsgleichung. Antwort: $L = \{-5; 3\}$.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Der Weg der Breite x liegt auf allen vier Seiten, daher wächst jede Rasenseite um $2x$. Gesamtfläche: $(12 + 2x)(8 + 2x) = 165$ (1 P.). Ausmultiplizieren: $96 + 24x + 16x + 4x^2 = 165$, also $4x^2 + 40x - 69 = 0$; durch 4 geteilt: $x^2 + 10x - 17{,}25 = 0$ (1 P.).
b) pq-Formel: $x = -5 \pm \sqrt{25 + 17{,}25} = -5 \pm \sqrt{42{,}25} = -5 \pm 6{,}5$. Es ergeben sich $1{,}5$ und $-11{,}5$; eine Breite kann nicht negativ sein, also ist $x = 1{,}5$ m (2 P.). Probe: $15 \cdot 11 = 165$.

c) Wegfläche gleich Gesamtfläche minus Rasen: $165 - 12 \cdot 8 = 165 - 96 = 69\,\mathrm{m}^2$ (1 P.). Antwort: Der Weg ist $1{,}5$ m breit und hat $69\,\mathrm{m}^2$ Fläche.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Ansatz: Die kleinere Zahl heißt n, die größere ist dann $n + 4$. Ihr Produkt ergibt $n(n + 4) = 117$ (1 P.). Ausmultiplizieren und umstellen führt auf $n^2 + 4n - 117 = 0$. Mit der pq-Formel ($p = 4$, $q = -117$) erhält man $n = -2 \pm \sqrt{4 + 117} = -2 \pm 11$, also $n = 9$ oder $n = -13$ (1 P.). Gesucht sind natürliche Zahlen, deshalb scheidet -13 aus; die zweite Zahl ist $9 + 4 = 13$ (1 P.). Probe: $13 - 9 = 4$ und $9 \cdot 13 = 117$. Bemerkung: Die negative Lösung würde das Zahlenpaar -13 und -9 liefern, das zwar rechnerisch passt, aber keine natürlichen Zahlen enthält. Antwort: Die Zahlen sind 9 und 13.