Lernzettel - Quadratische Gleichungen

Klasse: Klasse 9

Quadratische Gleichungen tauchen bei Flächen, Würfen und Zahlenrätseln auf. Du lernst mehrere Lösungswege und wählst den passenden.

Einstieg: Der Rasen mit dem Weg

Familie Yilmaz hat einen Rasen von 8 m mal 6 m. Rundherum soll ein Plattenweg angelegt werden, gleich breit. Das ganze Grundstück darf $120\,\mathrm{m}^2$ groß sein. Wie breit wird der Weg? Wenn die Breite x heißt, ist das Grundstück $(8+2x)$ mal $(6+2x)$ Meter groß, und die Gleichung $(8+2x)(6+2x)=120$ enthält ein x^2. Solche Gleichungen heißen quadratisch. Man kann sie nicht mit einfachen Umformungen lösen, aber mit festen Verfahren: Wurzelziehen, Ausklammern, pq-Formel. Die Lösungen der Gleichung sind $x=2$ und $x=-9$, und nur die erste ergibt einen sinnvollen Weg. In diesem Kapitel lernst du, wie man solche Gleichungen sicher löst und wie man Textaufgaben in Gleichungen übersetzt.

Quadratische Gleichungen

Definition: quadratische Gleichung

Eine **quadratische Gleichung** enthält x in der höchsten Potenz x^2: $ax^2+bx+c=0$ mit $a\neq 0$. Teilst du durch a, erhältst du die **Normalform** $x^2+px+q=0$. Die Lösungen heißen auch **Nullstellen**: Sie sind die x-Werte, an denen die zugehörige Parabel die x-Achse schneidet.

Sonderfälle

Regel: Reinquadratisch: $x^2=a$

Ziehe die Wurzel und denke an beide Vorzeichen. Ist die rechte Seite negativ, gibt es keine Lösung.

Beispiel 1: Reinquadratisch

Löse $3x^2-75=0$ und $x^2=-9$.

$3x^2=75$, $x^2=25$, also $x_1=5$ und $x_2=-5$.

$x^2=-9$ hat keine Lösung.

Regel: Ausklammern: $x^2+px=0$

Klammere x aus. Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist (**Satz vom**

Nullprodukt). Eine Lösung ist hier immer 0.

Beispiel 2: Ausklammern

Löse $x^2 - 5x = 0$.

$x(x-5) = 0$, also $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$.

Die pq-Formel

Satz: pq-Formel

Für $x^2 + px + q = 0$ gilt

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Definition: Diskriminante

Der Term unter der Wurzel heißt **Diskriminante** $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Bei $D > 0$ gibt es zwei Lösungen, bei $D = 0$ genau eine (doppelte) Lösung $x = -\frac{p}{2}$, bei D keine reelle Lösung.

So gehst du vor: Quadratische Gleichung lösen

1. Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 + px + q = 0$ (Klammern auflösen, alles auf eine Seite, durch a teilen).
2. Prüfe auf Sonderfälle: $p = 0$ (Wurzel ziehen) oder $q = 0$ (ausklammern).
3. Berechne sonst die Diskriminante und die Lösungen mit der pq-Formel.
4. Mache die Probe oder prüfe mit dem Satz von Vieta.
5. Prüfe bei Sachaufgaben, ob die Lösungen sinnvoll sind.

Beispiel 3: Zwei Lösungen

Löse $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$p = -7$, $q = 12$. $D = 3{,}5^2 - 12 = 0{,}25$.

$x = 3{,}5 \pm 0{,}5$, also $x_1 = 4$ und $x_2 = 3$. Probe: $16 - 28 + 12 = 0$. Stimmt.

Beispiel 4: Eine oder keine Lösung

Löse $x^2 - 6x + 9 = 0$ und $x^2 + 2x + 5 = 0$.

$D = 9 - 9 = 0$, also $x = 3$.

$D = 1 - 5 = -4$, also keine Lösung.

Beispiel 5: Erst umformen

Löse $2x^2 - 8x - 10 = 0$ und $(x+1)(x-2) = 4$.

Durch 2 teilen: $x^2 - 4x - 5 = 0$. $x = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$, also $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Ausmultiplizieren: $x^2 - x - 2 = 4$, also $x^2 - x - 6 = 0$. $x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+6} = 0{,}5 \pm 2{,}5$, also $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Probe für $x = 3$: $4 \cdot 1 = 4$.

Quadratische Ergänzung und Satz von Vieta

Regel: Quadratische Ergänzung

Die pq-Formel entsteht aus der quadratischen Ergänzung. Beispiel $x^2 + 6x - 7 = 0$: $x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$, also $(x+3)^2 = 16$. Damit $x + 3 = \pm 4$ und $x_1 = 1$, $x_2 = -7$.

Satz: Satz von Vieta

Hat $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$. Außerdem ist $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Beispiel 6: Vieta

Löse $x^2 - 5x + 6 = 0$ durch Erraten.

Gesucht sind zwei Zahlen mit Summe 5 und Produkt 6: 2 und 3.

Umgekehrt: Mit den Lösungen 3 und -2 erhält man $(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$.

Anwendungen

Beispiel 7: Rechteck

Die Länge eines Rechtecks ist 3 m größer als die Breite x. Die Fläche beträgt 40 m².

$x(x+3) = 40$, also $x^2 + 3x - 40 = 0$.

$x = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25+40} = -1{,}5 \pm 6{,}5$, also $x_1 = 5$, $x_2 = -8$. Negativ geht nicht.

Breite 5 m, Länge 8 m.

Beispiel 8: Aufeinanderfolgende Zahlen

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 156.

$n(n+1) = 156$, also $n^2 + n - 156 = 0$.

$n = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+156} = -0{,}5 \pm 12{,}5$. Es ist $n = 12$, die Zahlen sind 12 und 13.

Beispiel 9: Wurf vom Turm

Ein Ball wird von einem 20 m hohen Turm nach oben geworfen: $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$. Wann trifft er auf?

$h(t) = 0$ ergibt $t^2 - 3t - 4 = 0$. $t = 1{,}5 \pm 2{,}5$, also $t = 4$ oder $t = -1$.

Nur positive Zeiten sind sinnvoll. Der Ball landet nach 4 Sekunden.

Hinweis

Die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ sind die Nullstellen der Parabel $y = x^2 + px + q$. Bei $D > 0$ schneidet die Parabel die x-Achse zweimal, bei $D = 0$ berührt sie die Achse im Scheitel, bei D bleibt sie darüber. Du kannst jede Gleichung grafisch kontrollieren.

Der Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist. Diesen Gedanken nutzt du, wenn eine Gleichung schon in Faktoren zerlegt ist oder sich zerlegen lässt. Aus $(x - 3)(x + 5) = 0$ folgt sofort $x = 3$ oder $x = -5$. Du darfst nie ausmultiplizieren, wenn die Gleichung schon als Produkt vorliegt und die rechte Seite null ist. Auch bei $x^2 - 9 = 0$ hilft die dritte binomische Formel: $(x - 3)(x + 3) = 0$.

Beispiel 10: Faktorisieren

Löse $x^2 - 6x + 9 = 0$ und $4x^2 - 25 = 0$ ohne Formel.

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$, also $x = 3$. Weiter: $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5) = 0$, also $x = 2{,}5$ oder $x = -2{,}5$.

Gleichungen mit Substitution

Manche Gleichungen sind in Wahrheit quadratisch. Bei $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ setzt du $z = x^2$ und erhältst $z^2 - 5z + 4 = 0$. Mit der pq-Formel ist $z = 2{,}5 \pm 1{,}5$, also $z_1 = 4$ und $z_2 = 1$. Dann kehrst du zurück: $x^2 = 4$ ergibt $x = \pm 2$, und $x^2 = 1$ ergibt $x = \pm 1$. Die Gleichung hat also vier Lösungen. Vergiss die Rückrechnung nicht.

Beispiel 11: Substitution

Löse $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

$z = x^2$: $z^2 - 10z + 9 = 0$, $z = 5 \pm 4$, also $z_1 = 9$, $z_2 = 1$. Damit $x = \pm 3$ oder $x = \pm 1$.

Bruchgleichungen

Stehen Variablen im Nenner, multiplizierst du mit dem Hauptnenner und beachtest die Definitionsmenge: Die Nenner dürfen nicht null werden. Nach dem Multiplizieren entsteht oft eine quadratische Gleichung. Prüfe am Ende, ob die Lösungen in der Definitionsmenge

liegen.

Beispiel 12: Bruchgleichung

Löse $x + \frac{6}{x} = 5$ für $x \neq 0$.

Mal x: $x^2 + 6 = 5x$, also $x^2 - 5x + 6 = 0$. Dann $x = 2{,}5 \pm 0{,}5$: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Beide sind erlaubt. Probe: $3 + 2 = 5$ und $2 + 3 = 5$.

Textaufgaben sicher lösen

Gehe immer in fünf Schritten vor: Variable festlegen, Gleichung aufstellen, lösen, Lösungen prüfen (negative Längen oder unmögliche Werte streichen), Antwortsatz mit Einheit. Mache die Probe am Text und nicht nur an der Gleichung: Passt das Ergebnis zur Geschichte? So entdeckst du Fehler beim Aufstellen der Gleichung.

Welches Verfahren wann?

Eine kleine Entscheidungshilfe spart Zeit. Fehlt das x-Glied ($x^2 = a$), ziehst du die Wurzel und denkst an beide Vorzeichen. Fehlt das absolute Glied ($x^2 + px = 0$), klammerst du x aus. Bei der Form $(x + a)^2 = b$ ziehst du ebenfalls die Wurzel. In allen anderen Fällen benutzt du die pq-Formel oder die quadratische Ergänzung. Wenn die Zahlen klein und ganz sind, probiere zuerst Vieta: Suche zwei Zahlen mit der Summe $-p$ und dem Produkt q. Das geht oft schneller als jede Formel.

Beispiel 13: Linearfaktoren

Zerlege $x^2 - 2x - 15$ in Linearfaktoren.

Gesucht sind zwei Zahlen mit der Summe 2 und dem Produkt -15: Das sind 5 und -3. Also $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$, die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$.

Achtung: Zwei typische Fehler

Bei der pq-Formel steht vor dem p ein Minuszeichen, und die Wurzel gilt für den ganzen Ausdruck $(\frac{p}{2})^2 - q$. Wer $x^2 + 6x + 8 = 0$ mit $x = 6 \pm \sqrt{9 - 8}$ rechnet, hat das Vorzeichen und die Halbierung vergessen: Richtig ist $x = -3 \pm 1$. Teile außerdem nie durch x, denn dabei geht die Lösung $x = 0$ verloren.

Wusstest du?

Schon die Babylonier lösten vor rund 4000 Jahren quadratische Gleichungen, zum Beispiel Aufgaben zu Flächen von Feldern. Das Wort »Algebra« kommt aus dem Buch des arabischen Gelehrten al-Chwarizmi, der um 820 systematische Lösungswege für solche Gleichungen aufschrieb.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$; durch a teilen ergibt die Normalform $x^2 + px + q = 0$.
- Reinquadratisch $x^2 = a$: $x = \pm\sqrt{a}$ für $a > 0$, keine Lösung für a.
- Ohne absolutes Glied: ausklammern, $x(x + p) = 0$, Satz vom Nullprodukt.
- pq-Formel: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.
- Diskriminante $D = (\frac{p}{2})^2 - q$: $D > 0$ zwei, $D = 0$ eine, D keine Lösung.
- Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$; damit prüfst du Lösungen.
- Quadratische Ergänzung führt auf die Scheitelform und erklärt die pq-Formel.
- Textaufgaben: Gleichung aufstellen, lösen, unbrauchbare Lösungen (negative Längen) streichen, Antwortsatz.

Achtung

In $x^2 - 7x + 12$ ist $p = -7$, also $-\frac{p}{2} = +3{,}5$. Die Gleichung muss in Normalform stehen ($= 0$, Faktor vor x^2 ist 1). Quadriere $\frac{p}{2}$ und beachte das Vorzeichen von q. Vergiss keine der beiden Lösungen ($\pm$) und verwirf Lösungen, die im Sachzusammenhang unsinnig sind.

Zum Einstieg: Ein Zahlenrätsel

Lisa denkt sich eine Zahl, multipliziert sie mit sich selbst und subtrahiert das Doppelte der Zahl. Sie erhält 15. Welche Zahl hat sie gedacht? Durch Probieren findest du schnell die 5, denn $25 - 10 = 15$. Aber auch -3 passt: $9 + 6 = 15$. Das Rätsel führt auf die Gleichung $x^2 - 2x = 15$, eine quadratische Gleichung. Solche Gleichungen haben oft zwei Lösungen, manchmal eine und manchmal gar keine. In diesem Kapitel lernst du Verfahren, mit denen du sie sicher und ohne Probieren findest.

Beispiel 14

Löse die Gleichung $3x^2 + 6x - 24 = 0$ und mache die Probe.

Bevor wir die pq-Formel anwenden können, muss vor x^2 der Faktor 1 stehen. Wir teilen deshalb die ganze Gleichung durch 3 und erhalten $x^2 + 2x - 8 = 0$. Nun lesen wir $p = 2$ und $q = -8$ ab. Eingesetzt ergibt sich $x = -1 \pm \sqrt{1 + 8} = -1 \pm 3$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$. Zur Probe setzen wir ein: $3 \cdot 4 + 12 - 24 = 0$ und $3 \cdot 16 - 24 - 24 = 0$. Beide Lösungen sind richtig. Auch der Satz von Vieta bestätigt das Ergebnis: $2 + (-4) = -2 = -p$ und $2 \cdot (-4) = -8 = q$.

So gehst du vor: Welches Verfahren passt?

1. Fehlt das x-Glied, löse durch Wurzelziehen.
2. Fehlt das absolute Glied, klammere x aus und nutze den Satz vom Nullprodukt.

3. Sind alle drei Glieder vorhanden, bringe die Gleichung in Normalform und verwende die pq-Formel.
4. Berechne zuerst die Diskriminante: Sie zeigt dir, ob es überhaupt Lösungen gibt.
5. Prüfe bei Sachaufgaben, welche Lösungen in der Situation sinnvoll sind.

Häufige Fehler

Teile nie durch x, denn dabei geht die Lösung $x = 0$ verloren. Übernimm p und q immer mit ihrem Vorzeichen. Und denke daran, dass die pq-Formel nur gilt, wenn die rechte Seite null ist und vor x^2 eine 1 steht.

Schon gewusst?

Schon die Babylonier lösten vor fast 4000 Jahren quadratische Gleichungen auf Tontafeln, allerdings ohne Variablen und nur mit Worten. Der persische Gelehrte al-Chwarizmi beschrieb um 820 die quadratische Ergänzung mit echten Quadraten, die er geometrisch ergänzte. Von seinem Buchtitel stammt das Wort Algebra.

Ottos Tipp

Prüfe jede Lösung mit dem Satz von Vieta: Summe der Lösungen $= -p$, Produkt $= q$. Das dauert zehn Sekunden und deckt Vorzeichenfehler sofort auf. Vor der pq-Formel lohnt immer der Blick: Fehlt q, klammere aus. Fehlt p, ziehe die Wurzel.