Lösungen - Quadratische Gleichungen

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

Bei reinquadratischen Gleichungen bringt man x^2 allein auf eine Seite und zieht dann die Wurzel. Die Zahl rechts entscheidet über die Anzahl der Lösungen.
a) $x = \pm 7$. Probe: $7^2 = 49$ und $(-7)^2 = 49$.
b) $x^2 = 25$, also $x_1 = 5$, $x_2 = -5$. Zuerst wird 25 auf die rechte Seite gebracht.
c) $x^2 = 16$, also $x = \pm 4$. Zuerst durch 3 teilen.
d) $2x^2 = 18$, $x^2 = 9$, also $x = \pm 3$. Zuerst 1 subtrahieren, dann durch 2 teilen.
e) $x^2 = -4$: keine reelle Lösung, denn ein Quadrat ist nie negativ. Die Lösungsmenge ist leer.

Lösung zu Aufgabe 2

Da das absolute Glied fehlt, klammert man x (und gemeinsame Zahlen) aus. Ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist; daraus ergeben sich zwei einfache Gleichungen.
a) $x(x-5) = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Erster Faktor $x = 0$, zweiter Faktor $x - 5 = 0$.
b) $3x(x+4) = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. Auch der Faktor 3 wird ausgeklammert.
c) $x^2 - 7x = 0$, $x(x-7) = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Nicht durch x teilen, sonst geht die Lösung 0 verloren.
d) $x(2x-1) = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Aus $2x - 1 = 0$ folgt $x = \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Alle Gleichungen stehen schon in Normalform, man liest p und q mit Vorzeichen ab und setzt in die Formel ein. Die Probe mit dem Satz von Vieta (Summe gleich $-p$, Produkt gleich q) bestätigt die Lösungen.
a) $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Hier ist $p = -6$, $q = 8$; Probe: $4 \cdot 2 = 8$.
b) $x = -1 \pm \sqrt{1+15} = -1 \pm 4$: $x_1 = 3$, $x_2 = -5$. Hier ist $p = 2$, $q = -15$; Probe: $3 \cdot (-5) = -15$.
c) $x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+6} = 0{,}5 \pm 2{,}5$: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Hier ist $p = -1$, $q = -6$.
d) $x = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+0{,}75} = -0{,}5 \pm 1$: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -1{,}5$. Hier ist $p = 1$, $q = -0{,}75$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $D = 9 - 9 = 0$: eine Lösung $x = -3$. Die Gleichung ist die binomische Formel $(x+3)^2 = 0$; der Scheitel der zugehörigen Parabel liegt auf der x-Achse.
b) $D = 1 - 5 = -4$: keine Lösung. Die Wurzel aus einer negativen Zahl gibt es nicht; die Parabel liegt ganz oberhalb der x-Achse.
c) $D = 4 + 1 = 5$: $x = 2 \pm \sqrt{5}$, also $x_1 \approx 4{,}236$, $x_2 \approx -0{,}236$. Weil 5 keine Quadratzahl ist, gibt man die Lösungen exakt mit Wurzel und gerundet an.

d) $D = 9 - q = 0$, also $q = 9$; die Lösung ist $x = 3$. Genau eine Lösung bedeutet $D = 0$. Man setzt die Diskriminante gleich null und löst nach q auf.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $x^2 + x - 6 = 14$, $x^2 + x - 20 = 0$, $x = -0{,}5 \pm 4{,}5$: $x_1 = 4$, $x_2 = -5$. Ausmultiplizieren, 14 subtrahieren, pq-Formel. Probe für $x = 4$: $7 \cdot 2 = 14$.
b) $x^2 + 2x - 8 = 0$, $x = -1 \pm 3$: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Man bringt $3x$ und 8 auf die linke Seite und fasst zusammen.
c) Durch 2 teilen: $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x = 2 \pm 1$: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Vor der pq-Formel muss der Faktor vor x^2 gleich 1 sein, deshalb wird durch 2 geteilt.
d) $x^2 - 6x + 9 = 2x + 1$, $x^2 - 8x + 8 = 0$, $x = 4 \pm \sqrt{8} \approx 6{,}83$ und $1{,}17$. Man multipliziert die binomische Formel aus, bringt alles nach links und löst mit $p = -8$, $q = 8$. Exakt: $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x = 3{,}5 \pm 0{,}5$: 3 und 4. Nach Vieta sind die gesuchten Zahlen die Lösungen von $x^2 - 7x + 12 = 0$. Probe: $3 + 4 = 7$, $3 \cdot 4 = 12$.
b) $p = -(2 - 5) = 3$, $q = 2 \cdot (-5) = -10$: $x^2 + 3x - 10 = 0$. Man setzt Summe und Produkt der Lösungen in die Formeln für p und q ein.
c) $2 + 7 = 9 = -p$ und $2 \cdot 7 = 14 = q$: richtig. Summe und Produkt stimmen, also sind 2 und 7 die Lösungen.
d) $9 + 3p - 12 = 0$, $p = 1$; $x_1 x_2 = -12$, also $x_2 = -4$. Man setzt die bekannte Lösung 3 ein und bestimmt p; die zweite Lösung folgt aus dem Produkt $3 \cdot x_2 = -12$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $b(b + 4) = 96$, also $b^2 + 4b - 96 = 0$. Die Länge ist $b + 4$; Fläche gleich Breite mal Länge.
b) $b = -2 \pm \sqrt{4 + 96} = -2 \pm 10$: $b = 8$ m (die Lösung -12 ist unmöglich), Länge 12 m. Probe: $8 \cdot 12 = 96$. Eine negative Breite ergibt keinen Sinn, deshalb bleibt nur $b = 8$.
c) $U = 2 \cdot (8 + 12) = 40$ m. Antwort: Der Zaun muss 40 m lang sein.
d) $40 \cdot 18 = 720$ €. Antwort: Der Zaun kostet 720 €.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $n(n + 1) = 156$, $n^2 + n - 156 = 0$, $n = -0{,}5 \pm 12{,}5$: $n = 12$, also 12 und 13. Die zweite Zahl ist $n + 1$. Die negative Lösung -13 ist keine natürliche Zahl.
b) $n(n + 2) = 143$, $n^2 + 2n - 143 = 0$, $n = -1 \pm 12$: $n = 11$, also 11 und 13. Aufeinanderfolgende ungerade Zahlen unterscheiden sich um 2. Probe: $11 \cdot 13 = 143$.
c) $x^2 = x + 30$, $x^2 - x - 30 = 0$, $x = 0{,}5 \pm 5{,}5$: $x_1 = 6$, $x_2 = -5$. Beide Lösungen erfüllen die Bedingung: $36 = 6 + 30$ und $25 = -5 + 30$.
d) $n^2 + (n + 1)^2 = 145$, $2n^2 + 2n - 144 = 0$, $n^2 + n - 72 = 0$, $n = -0{,}5 \pm 8{,}5$: $n = 8$, also 8 und 9 (oder -9 und -8). Man multipliziert $(n + 1)^2$ aus, teilt durch 2 und löst.

Probe: $64 + 81 = 145$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $t = \sqrt{\frac{s}{5}}$: $\sqrt{4} = 2$ s; $\sqrt{9} = 3$ s; $\sqrt{16} = 4$ s. Man löst $5t^2 = s$ nach t auf; bei vierfacher Höhe verdoppelt sich die Fallzeit.
b) $5t^2 + 10t - 45 = 0$, $t^2 + 2t - 9 = 0$, $t = -1 + \sqrt{10} \approx 2{,}16$ s. Man setzt $s = 45$ ein, teilt durch 5 und löst mit der pq-Formel. Durch den Wurf ist der Stein schneller unten als nach 3 s.
c) $s = 45 + 30 = 75$ m. Man setzt $t = 3$ in $5t^2 + 10t$ ein.
d) Die zweite Lösung $t = -1 - \sqrt{10} \approx -4{,}16$ ist negativ und liegt vor dem Wurf, also unmöglich. Bei Sachaufgaben muss man immer prüfen, welche Lösungen in der Situation sinnvoll sind.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $(8 + 2x)(6 + 2x) = 120$, $4x^2 + 28x + 48 = 120$, $x^2 + 7x - 18 = 0$. Rasen und Weg bilden ein Rechteck, das auf jeder Seite um x länger ist. Man multipliziert aus, subtrahiert 120 und teilt durch 4.
b) $x = -3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 18} = -3{,}5 \pm 5{,}5$: $x = 2$ m. Die negative Lösung -9 entfällt. Antwort: Der Weg ist 2 m breit.
c) $120 - 48 = 72\,\mathrm{m}^2$. Die Wegfläche ist die Gesamtfläche minus Rasenfläche.
d) $72 : 0{,}25 = 288$ Platten. Jede Platte hat $0{,}25\,\mathrm{m}^2$. Antwort: Man braucht 288 Platten.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $20 \cdot 30 = 600\,\mathrm{cm}^2$. Antwort: Das Foto hat 600 cm² Fläche.
b) $(20 + 2x)(30 + 2x) = 1200$, $4x^2 + 100x - 600 = 0$, $x^2 + 25x - 150 = 0$. Foto und Rahmen zusammen sind doppelt so groß wie das Foto, also 1200 cm². Ausmultiplizieren und durch 4 teilen ergibt die Normalform.
c) $x = -12{,}5 \pm \sqrt{156{,}25 + 150} = -12{,}5 \pm 17{,}5$: $x = 5$ cm. Die negative Lösung -30 entfällt. Antwort: Der Rahmen ist 5 cm breit.
d) 30 cm $\times$ 40 cm, also $1200\,\mathrm{cm}^2$. Kontrolle: Die Rahmenfläche ist $1200 - 600 = 600$ cm², genauso groß wie das Foto.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $h^2 + (h - 7)^2 = 169$, $2h^2 - 14h - 120 = 0$, $h^2 - 7h - 60 = 0$. Leiter ist die Hypotenuse, Höhe und Abstand sind die Katheten. Man multipliziert aus und teilt durch 2.
b) $h = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 60} = 3{,}5 \pm 8{,}5$: $h = 12$ dm. Die negative Lösung -5 entfällt. Antwort: Die Leiter berührt die Wand in 12 dm Höhe.
c) $12 - 7 = 5$ dm. Probe: $25 + 144 = 169$. Der Fuß steht 5 dm von der Wand entfernt; die Probe mit Pythagoras stimmt.
d) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\alpha \approx 67{,}4°$. Die Höhe ist die Gegenkathete des Winkels am Boden.

Antwort: Die Leiter steht unter etwa 67° zum Boden.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\frac{n(n-1)}{2} = 45$, $n^2 - n - 90 = 0$, $n = 0{,}5 \pm 9{,}5$: $n = 10$ Gäste. Man multipliziert mit 2 und löst mit der pq-Formel; die negative Lösung -9 entfällt. Antwort: Es sind 10 Gäste.
b) $n(n-1) = 132$, $n^2 - n - 132 = 0$, $n = 0{,}5 \pm 11{,}5$: $n = 12$ Mannschaften. Bei Hin- und Rückspiel gibt es $n(n-1)$ Spiele. Antwort: In der Liga spielen 12 Mannschaften.
c) $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. Man setzt $n = 30$ in die Formel ein. Antwort: In einer Klasse mit 30 Personen gibt es 435 Handschläge.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $-5t^2 + 40t = 60$, $t^2 - 8t + 12 = 0$, $t = 4 \pm 2$: $t_1 = 2$ s, $t_2 = 6$ s. Man setzt $h = 60$, teilt durch -5 und löst; auf dem Weg nach oben und nach unten ist die Rakete je einmal 60 m hoch.
b) $h = -5(t-4)^2 + 80$: bei $t = 4$ s, 80 m. Quadratische Ergänzung nach Ausklammern von -5. Antwort: Nach 4 s erreicht die Rakete die größte Höhe von 80 m.
c) $-5t(t-8) = 0$: bei $t = 8$ s. Man setzt $h = 0$ und klammert aus; $t = 0$ ist der Start. Antwort: Nach 8 s landet sie.
d) $-5t^2 + 40t = 75$, $t^2 - 8t + 15 = 0$, $t = 3$ oder 5. Also von 3 s bis 5 s: 2 s. Die Rakete ist zwischen den beiden Lösungen über 75 m. Antwort: 2 Sekunden lang.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $A(x) = (40 - 2x)(30 - 2x) = 4x^2 - 140x + 1200$. Die Bodenfläche ist ein Rechteck, dessen Seiten um $2x$ kürzer sind als das Blech.
b) $4x^2 - 140x + 600 = 0$, $x^2 - 35x + 150 = 0$, $x = 17{,}5 \pm 12{,}5$: $x = 5$ cm. Man setzt $A(x) = 600$, teilt durch 4 und löst; die Lösung 30 ist nicht möglich (siehe d). Antwort: Die Quadrate sind 5 cm groß.
c) $V = 600 \cdot 5 = 3000\,\text{cm}^3 = 3$ l. Volumen gleich Grundfläche mal Höhe x. Antwort: Die Schachtel fasst 3 Liter.
d) $x = 30$ cm ist größer als die halbe Blechbreite (15 cm), das Blech würde wegfallen. Deshalb muss x cm gelten.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Mit $v(v-4)$ multiplizieren: $48(v-4) + 48v = 7v(v-4)$, $96v - 192 = 7v^2 - 28v$, $7v^2 - 124v + 192 = 0$. Zeit ist Strecke durch Geschwindigkeit; die Summe der beiden Zeiten ist 7 h. Man multipliziert mit dem Hauptnenner.
b) $v = \frac{124 \pm \sqrt{124^2 - 4 \cdot 7 \cdot 192}}{14} = \frac{124 \pm 100}{14}$: $v_1 = 16$, $v_2 \approx 1{,}71$ km/h. Weil der Faktor vor v^2 nicht 1 ist, wird die allgemeine Lösungsformel (abc-Formel) benutzt.
c) Hinweg $\frac{48}{16} = 3$ h, Rückweg $\frac{48}{12} = 4$ h. Antwort: Hinweg mit 16 km/h in 3 Stunden, Rückweg mit 12 km/h in 4 Stunden, zusammen 7 Stunden.
d) Bei $v \approx 1{,}71$ km/h wäre $v - 4$: negative Geschwindigkeit ist unmöglich. Deshalb ist

nur $v = 16$ km/h eine sinnvolle Lösung.

Lösung zu Aufgabe 17

a) In einer Stunde füllt das erste Rohr $\frac{1}{x}$, das zweite $\frac{1}{x+3}$ des Pools. Zusammen füllen sie in einer Stunde $\frac{1}{2}$ des Pools. Die Anteile pro Stunde addieren sich, weil beide Rohre gleichzeitig laufen.
b) $2(x+3) + 2x = x(x+3)$, $4x + 6 = x^2 + 3x$, $x^2 - x - 6 = 0$, $x = 0{,}5 \pm 2{,}5$: $x = 3$ (die Lösung -2 ist unmöglich). Man multipliziert mit dem Hauptnenner $2x(x+3)$ und bringt alles auf eine Seite.
c) Das erste Rohr braucht 3 h, das zweite 6 h. Probe: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
d) Erstes: $\frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$; zweites: $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$; zusammen $50\,\%$. Die Anteile pro Stunde ergänzen sich zur Hälfte des Pools, passend zu 2 Stunden Gesamtzeit.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $(1{,}2 + 2x)(0{,}8 + 2x) = 2{,}4$, $4x^2 + 4x + 0{,}96 = 2{,}4$, $x^2 + x - 0{,}36 = 0$. Die Decke ist auf jeder Seite um x länger als der Tisch. Man multipliziert aus, subtrahiert 2,4 und teilt durch 4.
b) $x = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 0{,}36} = -0{,}5 \pm 0{,}781$, also $x \approx 0{,}281$ m ≈ 28 cm. Die negative Lösung entfällt. Antwort: Die Decke steht ringsum etwa 28 cm über.
c) $1{,}2 + 2 \cdot 0{,}281 = 1{,}76$ m $\times$ $0{,}8 + 0{,}562 = 1{,}36$ m. Antwort: Die Decke ist etwa 1,76 m lang und 1,36 m breit.
d) $2{,}4 - 0{,}96 = 1{,}44\,\mathrm{m}^2$. Die überhängende Fläche ist Deckenfläche minus Tischfläche $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Seiten x und $17 - x$: $A = x(17 - x)$. Zwei Seiten zusammen sind der halbe Umfang, also 17 cm.
b) $x^2 - 17x + 60 = 0$, $x = 8{,}5 \pm \sqrt{72{,}25 - 60} = 8{,}5 \pm 3{,}5$: $x_1 = 12$, $x_2 = 5$. Man setzt $A = 60$ und löst; beide Lösungen beschreiben dasselbe Rechteck 12 cm mal 5 cm.
c) $x^2 - 17x + 80 = 0$: $D = 72{,}25 - 80$, keine Lösung. Maximum bei $x = 8{,}5$: $A = 8{,}5^2 = 72{,}25\,\mathrm{cm}^2$ (Quadrat). Die Diskriminante ist negativ. Die größtmögliche Fläche bei 34 cm Umfang beträgt 72,25 cm², deshalb sind 80 cm² unmöglich.
d) Beim Quadrat ($8{,}5$ cm), denn die Diagonale $d = \sqrt{x^2 + (17 - x)^2}$ ist dort am kleinsten. Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel bei $x = 8{,}5$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Aus $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ folgt $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$. Mit $x = \frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$, also $x = 1 + \frac{1}{x}$. Mit x multipliziert: $x^2 = x + 1$, also $x^2 - x - 1 = 0$. Man teilt den Bruch $\frac{a+b}{a}$ auf und ersetzt $\frac{a}{b}$ durch x.
b) $x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 1} = 0{,}5 \pm 1{,}118$; positive Lösung $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Die negative

Lösung entfällt, weil ein Seitenverhältnis positiv ist. Diese Zahl heißt goldene Zahl.
c) $10 \cdot 1{,}618 = 16{,}18$ cm. Die lange Seite ist das 1,618-Fache der kurzen.
d) $1{,}618^2 = 2{,}618$ und $1{,}618 + 1 = 2{,}618$: passt. Die goldene Zahl hat die besondere Eigenschaft, dass ihr Quadrat um genau 1 größer ist als sie selbst.