Lösungen zur Klassenarbeit - Quadratische Funktionen

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Quadratische Ergänzung: Der Koeffizient von x ist -6, die Hälfte -3, deren Quadrat 9. Man ergänzt und zieht gleich wieder ab: $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$ (1 P.). Aus der Scheitelform $(x-d)^2 + e$ liest man $S(3|-4)$ ab (1 P.).
b) Nullstellen: $f(x) = 0$ bedeutet $(x-3)^2 = 4$. Wurzelziehen liefert zwei Fälle: $x - 3 = 2$ oder $x - 3 = -2$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ (2 P.). Kontrolle: Die Nullstellen liegen symmetrisch zur Scheitelstelle $x = 3$, und $f(1) = 1 - 6 + 5 = 0$. Antwort: $S(3|-4)$; Nullstellen 1 und 5.

Lösung zu Aufgabe 2 (3 BE/Punkte)

a) Punktprobe: $P(2|-6)$ liegt auf $y = ax^2$, also gilt $-6 = a \cdot 2^2 = 4a$. Daraus folgt $a = -1{,}5$ (1 P.). Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Parabel nach unten geöffnet ist; wegen $|a| = 1{,}5 > 1$ ist sie schmaler (gestreckt) im Vergleich zur Normalparabel (1 P.).
b) Man setzt $x = -4$ in $y = -1{,}5x^2$ ein: $y = -1{,}5 \cdot 16 = -24$. Das stimmt mit der y-Koordinate von Q überein, also liegt Q auf der Parabel (1 P.). Zusatz: Wegen der Symmetrie zur y-Achse liegt auch $(4|-24)$ auf ihr. Antwort: $a = -1{,}5$, Q liegt auf der Parabel.

Lösung zu Aufgabe 3 (5 BE/Punkte)

a) Man klammert -5 aus: $h(t) = -5(t^2 - 2t) + 1$. Ergänzen mit 1: $-5(t^2 - 2t + 1 - 1) + 1 = -5(t-1)^2 + 5 + 1 = -5(t-1)^2 + 6$. Scheitel $S(1|6)$: Nach 1 s erreicht der Ball seine größte Höhe von 6 m (2 P.).
b) Bodenkontakt bedeutet $h(t) = 0$. Aus $-5(t-1)^2 + 6 = 0$ folgt $(t-1)^2 = 1{,}2$, also $t = 1 \pm \sqrt{1{,}2}$. Nur $t = 1 + 1{,}095 \approx 2{,}10$ s ist sinnvoll, die negative Zeit entfällt (2 P.).
c) Einsetzen: $h(0{,}5) = -5 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}5 + 1 = -1{,}25 + 5 + 1 = 4{,}75$ m (1 P.). Antwort: höchster Punkt nach 1 s bei 6 m, Aufprall nach etwa $2{,}1$ s, nach $0{,}5$ s ist der Ball $4{,}75$ m hoch.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Die beiden Seiten senkrecht zur Wand sind je x lang. Vom Zaun bleiben für die Seite parallel zur Wand $24 - 2x$ Meter. Flächeninhalt gleich Länge mal Breite: $A(x) = x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x$ (2 P.). Sinnvoll ist $0 < x < 12$.
b) Die Parabel ist nach unten geöffnet ($a = -2$), ihr Scheitel liefert das Maximum. Ergänzen: $A(x) = -2(x^2 - 12x + 36) + 72 = -2(x-6)^2 + 72$ (2 P.). Also ist die Fläche für $x = 6$ m am größten; die Wandseite ist $24 - 12 = 12$ m lang und $A = 6 \cdot 12 = 72\,\mathrm{m}^2$

(1 P.). Vergleich: Bei $x = 5$ wären es nur $5 \cdot 14 = 70\,\mathrm{m}^2$. Antwort: Seiten 6 m und 12 m, höchstens $72\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Schnittpunkte haben auf beiden Graphen denselben y-Wert, also setzt man die Terme gleich: $x^2 = x + 2$ (1 P.). Alles auf eine Seite bringen ergibt die Normalform $x^2 - x - 2 = 0$ mit $p = -1$ und $q = -2$. Die pq-Formel liefert $x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ (1 P.). Die zugehörigen y-Werte erhält man durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen: $y = 2^2 = 4$ und $y = (-1)^2 = 1$ (1 P.). Probe mit der Geraden: $2 + 2 = 4$ und $-1 + 2 = 1$, beide Punkte liegen also auf beiden Graphen. Antwort: $S_1(2|4)$ und $S_2(-1|1)$.