Lernzettel - Quadratische Funktionen

Klasse: Klasse 9

Quadratische Funktionen beschreiben Würfe, Brücken und Flächen. Ihr Graph ist die Parabel.

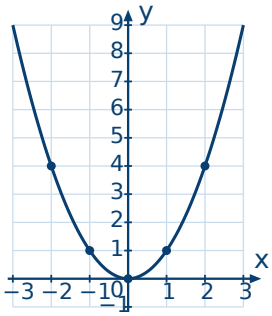
Einstieg: Der Freistoß im Stadion

Beim Freistoß fliegt der Ball in einem Bogen über die Mauer ins Tor. Wer die Flugbahn aufzeichnet, erkennt eine Kurve, die auf beiden Seiten gleich verläuft: eine Parabel. Auch das Wasser eines Springbrunnens, der Bogen einer Brücke und die Form einer Satellitenschüssel folgen Parabeln. Alle diese Kurven gehören zu quadratischen Funktionen $y = ax^2 + bx + c$. Ihr Graph hat einen höchsten oder tiefsten Punkt, den Scheitel, und der verrät oft schon die Antwort auf die Frage: Wie hoch fliegt der Ball? Wann ist der Gewinn am größten? In diesem Kapitel lernst du, Parabeln zu zeichnen, ihre Gleichung zu bestimmen und sie auf reale Probleme anzuwenden.

Normalparabel und Streckfaktor

Definition: quadratische Funktion

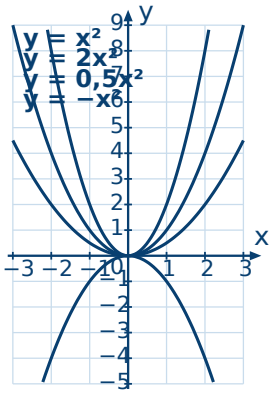
Eine **quadratische Funktion** hat die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$. Ihr Graph ist eine **Parabel**. Die einfachste ist $f(x) = x^2$, die **Normalparabel**.



Regel: Wertetabelle der Normalparabel

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Sie ist nach oben geöffnet und symmetrisch zur y-Achse. Ihr tiefster Punkt ist der **Scheitelpunkt** $S(0|0)$, die y-Achse ist die **Symmetrieachse**.



Merke: Der Streckfaktor a

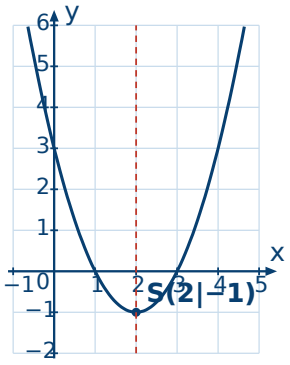
Bei $f(x) = ax^2$ gilt: $a > 0$ nach oben geöffnet, a nach unten. Bei $|a| > 1$ ist die Parabel **enger** (gestreckt), bei 0 **weiter** (gestaucht). Beispiel bei $x = 2$: $2x^2$ hat den Wert 8, $0{,}5x^2$ den Wert 2, $-x^2$ den Wert -4.

Scheitelform

Satz: Scheitelform

$$f(x) = a(x - d)^2 + e$$

Der Scheitelpunkt ist $S(d|e)$. Der Wert d verschiebt in x-Richtung (Vorzeichen umdrehen!), e in y-Richtung.



Beispiel 1: Scheitel ablesen

Lies den Scheitel ab: $f(x) = (x - 2)^2 + 3$, $g(x) = -(x + 1)^2 + 4$, $h(x) = x^2 - 5$. $S_f(2|3)$. $S_g(-1|4)$, nach unten geöffnet. $S_h(0|-5)$.

So gehst du vor: Quadratische Ergänzung

1. Klammere bei $a \neq 1$ zuerst a aus den Gliedern mit x aus.

2. Halbiere den Koeffizienten bei x.
3. Addiere und subtrahiere das Quadrat dieser Zahl.
4. Fasse mit der binomischen Formel zusammen und lies den Scheitel ab.

Beispiel 2: Ergänzen

Bringe $f(x) = x^2 + 6x + 5$ und $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$ in Scheitelform.

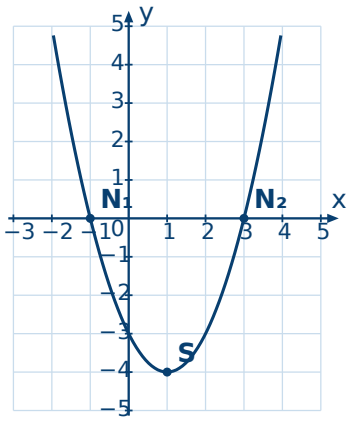
$6 : 2 = 3$. $f(x) = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4$. Scheitel $S(-3|-4)$.

$g(x) = 2(x^2 - 6x + 5) = 2\left[(x - 3)^2 - 4\right] = 2(x - 3)^2 - 8$. Scheitel $S(3|-8)$.

Nullstellen und y-Achsenabschnitt

Definition: Nullstelle

Nullstellen sind die Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet: $f(x) = 0$. Eine Parabel hat zwei, eine oder keine Nullstelle. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $f(0)$, in der Normalform einfach c.



Beispiel 3: Nullstellen

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = (x - 2)^2 - 9$ und den y-Achsenabschnitt von $g(x) = (x - 3)^2 + 1$.

$(x - 2)^2 = 9$, also $x - 2 = 3$ oder $x - 2 = -3$: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

$g(0) = 9 + 1 = 10$, also $S_y(0|10)$.

Satz: Drei Darstellungen

Normalform $ax^2 + bx + c$ (zeigt c), Scheitelform $a(x - d)^2 + e$ (zeigt den Scheitel), faktorisierte Form $a(x - x_1)(x - x_2)$ (zeigt die Nullstellen). Der Scheitel liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen: $d = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Beispiel 4: Faktorisierte Form

Bestimme den Scheitel von $f(x) = (x-1)(x-5)$.

Nullstellen 1 und 5, also $d = 3$ und $f(3) = 2 \cdot (-2) = -4$. Scheitel $S(3|-4)$.

Parabel zeichnen und Gleichung bestimmen

So gehst du vor: Parabel zeichnen

1. Zeichne den Scheitelpunkt ein.
2. Erstelle eine Wertetabelle links und rechts vom Scheitel und nutze die Symmetrie.
3. Trage die Punkte ein und verbinde sie mit einer sauberen runden Kurve (kein Lineal).
4. Von S gehst du 1 nach rechts und a nach oben, 2 nach rechts und $4a$ nach oben.

Beispiel 5: Gleichung aus Scheitel und Punkt

Der Scheitel ist $S(1|-2)$, der Punkt $P(3|2)$ liegt auf der Parabel.

Ansatz: $f(x) = a(x-1)^2 - 2$. Einsetzen von P: $2 = 4a - 2$, also $a = 1$.

$f(x) = (x-1)^2 - 2$.

Beispiel 6: Ballwurf

Die Höhe eines Balls ist $h(t) = -5t^2 + 20t$ (Meter, Sekunden). Wann ist er am höchsten, wann wieder am Boden?

$h(t) = -5(t^2 - 4t) = -5(t-2)^2 + 20$. Nach 2 s erreicht er 20 m.

Nullstellen: $-5t(t-4) = 0$, also $t = 0$ und $t = 4$. Nach 4 s ist er am Boden.

Beispiel 7: Größtes Rechteck

Ein 40 m langer Zaun begrenzt ein Rechteck. Wann ist die Fläche am größten?

Seiten x und $20 - x$: $A(x) = -x^2 + 20x = -(x-10)^2 + 100$.

Maximal bei $x = 10$ m (Quadrat) mit 100 m².

Beispiel 8: Parabel und Gerade

Wo schneidet $y = x + 2$ die Normalparabel?

$x^2 = x + 2$, also $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$.

Schnittpunkte $(2|4)$ und $(-1|1)$. Eine Gerade kann eine Parabel in zwei, einem oder

keinem Punkt schneiden.

Verschieben, Strecken und Spiegeln

Alle Parabeln lassen sich aus der Normalparabel $y = x^2$ gewinnen. Der Term $(x - d)^2$ verschiebt sie um d nach rechts (bei d nach links), der Summand $+e$ um e nach oben. Der Faktor a streckt ($|a| > 1$) oder staucht ($|a|$) sie, und a spiegelt sie an der x-Achse. Merke dir: Das Vorzeichen in der Klammer wirkt »umgekehrt«. Bei $(x + 3)^2$ liegt der Scheitel bei $x = -3$.

Beispiel 9: Gleichung beschreiben

Beschreibe $y = -2(x + 1)^2 + 4$.

Der Scheitel liegt bei $S(-1|4)$. Wegen $a = -2$ ist die Parabel nach unten geöffnet und doppelt so eng wie die Normalparabel. Der höchste Wert ist $y = 4$.

Parabel und Gerade

Eine Gerade $y = mx + n$ kann eine Parabel in zwei Punkten schneiden, in einem Punkt berühren (Tangente) oder gar nicht treffen. Du setzt die Terme gleich und löst die quadratische Gleichung: Zwei Lösungen bedeuten zwei Schnittpunkte, eine Lösung eine Berührung, keine Lösung keinen gemeinsamen Punkt. Die y-Werte erhältst du, indem du die x-Werte in eine der beiden Gleichungen einsetzt.

Beispiel 10: Schnittpunkte

Schneide $y = x^2 - 2x$ mit $y = x + 4$.

$x^2 - 2x = x + 4$, also $x^2 - 3x - 4 = 0$. Mit der pq-Formel:
$x = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = 1{,}5 \pm 2{,}5$, also $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Die Punkte: $(4|8)$ und $(-1|3)$.

Extremwertaufgaben

Viele Alltagsfragen suchen den größten oder kleinsten Wert: größte Fläche bei gegebenem Zaun, größter Gewinn bei einem Preis. Die Strategie ist immer gleich: Du stellst eine Funktion auf, die von einer Variablen abhängt, formst sie in die Scheitelform um und liest den Scheitel ab. Die x-Koordinate sagt, welcher Wert optimal ist, die y-Koordinate, wie groß das Maximum oder Minimum ist.

Beispiel 11: Rechteck mit festem Umfang

Ein Rechteck hat den Umfang 20 cm. Welche Seiten ergeben die größte Fläche?

Die Seiten sind x und $10 - x$. Fläche: $A = x(10 - x) = -x^2 + 10x = -(x - 5)^2 + 25$. Das Maximum liegt bei $x = 5$: ein Quadrat mit $A = 25\,\text{cm}^2$.

Die Produktform

Kennst du die Nullstellen x_1 und x_2, schreibst du die Funktion als Produkt: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. Der Scheitel liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen bei $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$. Diese Form ist praktisch, wenn die Parabel zwei bekannte Punkte auf der x-Achse hat.

Beispiel 12: Aus den Nullstellen

Eine Parabel hat die Nullstellen -1 und 5 und geht durch $(0|-5)$. Bestimme die Gleichung.

$y = a(x+1)(x-5)$. Einsetzen von $(0|-5)$: $-5 = a \cdot 1 \cdot (-5)$, also $a = 1$. Die Gleichung lautet $y = (x+1)(x-5) = x^2 - 4x - 5$. Der Scheitel liegt bei $x = 2$, $y = -9$.

Wusstest du?

Galileo Galilei erkannte vor über 400 Jahren, dass geworfene Gegenstände auf Parabelbahnen fliegen (ohne Luftwiderstand). Satellitenschüsseln und Scheinwerfer nutzen die Parabelform: Strahlen, die parallel zur Achse einfallen, werden in einem Punkt gebündelt, dem Brennpunkt.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Quadratische Funktion: $y = ax^2 + bx + c$; der Graph ist eine Parabel mit Scheitelpunkt.
- Normalparabel $y = x^2$ hat den Scheitel $(0|0)$ und ist symmetrisch zur y-Achse.
- Streckfaktor a: $|a| > 1$ enger, $|a|$ weiter, a nach unten geöffnet.
- Scheitelform $y = a(x-d)^2 + e$: Scheitel $S(d|e)$; aus $y = x^2 + px + q$ mit der quadratischen Ergänzung.
- Nullstellen: $y = 0$ lösen, mit der pq-Formel $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$; 0, 1 oder 2 Nullstellen.
- Drei Darstellungen: Normalform, Scheitelform, Produktform $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Gleichung aufstellen: Scheitel und ein Punkt, oder drei Punkte mit einem Gleichungssystem.
- Anwendungen: Wurfbahnen, Brücken, Extremwerte (größte Fläche, bester Gewinn); der Scheitel liefert das Maximum oder Minimum.

Achtung

Bei $f(x) = (x+3)^2$ liegt der Scheitel bei $d = -3$, nicht 3. $(x+3)^2$ ist $x^2 + 6x + 9$, nicht $x^2 + 9$. Klammere beim Ausklammern von a alle Summanden mit x aus. Zeichne eine Parabel mit runder Kurve, nicht mit Spitze oder Lineal.

Zum Einstieg: Parabeln im Alltag

Wirf einen Ball schräg nach oben oder beobachte den Wasserstrahl eines Springbrunnens: Die Bahn ist eine Parabel. Auch die Kabel von Hängebrücken, Satellitenschüsseln und die Scheinwerfer von Autos haben Parabelform. Halte beim nächsten Mal einen Wasserschlauch schräg und achte darauf, dass die Kurve links und rechts vom höchsten Punkt genau gleich aussieht. Diese Symmetrie zum Scheitel ist die wichtigste Eigenschaft aller Parabeln. In diesem Kapitel lernst du, wie man aus der Funktionsgleichung den Scheitel, die Öffnung und die Nullstellen bestimmt und damit solche Bahnen genau berechnet, zum Beispiel die größte Höhe eines Balls oder die Breite eines Brückenbogens.

Beispiel 13

Bestimme die Gleichung der Parabel mit dem Scheitel $S(1|4)$, die durch den Punkt $P(3|-4)$ geht, und berechne ihre Nullstellen.

Wir beginnen mit der Scheitelform $y = a(x-1)^2 + 4$. Um den Streckfaktor zu finden, setzen wir den Punkt P ein: $-4 = a \cdot (3-1)^2 + 4$, also $-8 = 4a$ und $a = -2$. Die Gleichung lautet $y = -2(x-1)^2 + 4$. Für die Nullstellen setzen wir $y = 0$: $2(x-1)^2 = 4$, also $(x-1)^2 = 2$ und $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Die Nullstellen liegen bei etwa $-0{,}41$ und $2{,}41$, symmetrisch zum Scheitel.

So gehst du vor: Eine Parabel skizzieren

1. Bringe die Gleichung mit quadratischer Ergänzung in die Scheitelform.
2. Zeichne den Scheitelpunkt ein.
3. Lies am Vorzeichen von a ab, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist.
4. Berechne zwei Punkte rechts vom Scheitel und spiegle sie an der Symmetrieachse.
5. Verbinde die Punkte zu einer glatten, runden Kurve ohne Spitze.

Häufige Fehler

Bei $y = (x+3)^2$ liegt der Scheitel bei $x = -3$ und nicht bei $+3$. Bei der quadratischen Ergänzung mit einem Faktor vor x^2 muss dieser zuerst ausgeklammert werden. Und beim Einsetzen negativer Zahlen gehört die Klammer dazu: $(-2)^2 = 4$, aber $-2^2 = -4$.

Schon gewusst?

Galileo Galilei zeigte als Erster, dass geworfene Körper auf Parabelbahnen fliegen, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt. Bei Basketballwürfen, beim Weitsprung und beim Kugelstoßen planen Trainer heute die beste Abwurfhöhe und den besten Winkel mit genau diesen Funktionen.

Ottos Tipp

Lies aus der Scheitelform sofort drei Dinge ab: den Scheitel $S(d|e)$, die Öffnung (Vorzeichen von a) und die Form (Betrag von a). Mit der Symmetrie sparst du die Hälfte der Wertetabelle. Zeichne die Parabel mit mindestens fünf Punkten und beschrifte den Scheitel.