Lösungen - Quadratische Funktionen

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

a) Zeile 1: $9, 4, 1, 0, 1, 4, 9$. Zeile 2: $7, 2, -1, -2, -1, 2, 7$. Zeile 3: $(x-1)^2$: $16, 9, 4, 1, 0, 1, 4$. Man setzt jeden x-Wert in den Term ein. Bei $(x-1)^2$ wird zuerst die Klammer berechnet und dann quadriert, zum Beispiel $(-3-1)^2 = 16$.
b) $y = x^2 - 2$ ist um 2 nach unten verschoben, $y = (x-1)^2$ um 1 nach rechts. Ein Summand außerhalb der Klammer verschiebt nach oben oder unten; eine Zahl in der Klammer verschiebt nach links oder rechts, und zwar entgegengesetzt zum Vorzeichen.
c) $S_1(0|0)$, $S_2(0|-2)$, $S_3(1|0)$. Den Scheitel erkennt man in der Tabelle am kleinsten y-Wert, um den die Werte symmetrisch liegen.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $S(2|3)$, nach oben geöffnet, Minimum 3. Man liest $d = 2$ und $e = 3$ direkt ab; da $a = 1 > 0$ ist, liegt beim Scheitel der kleinste Wert.
b) $S(-1|-4)$, nach unten geöffnet, Maximum -4. Achtung: $x + 1 = x - (-1)$, also ist $d = -1$. Wegen $a = -1$ ist der Scheitel der höchste Punkt.
c) $S(4|0)$, nach oben, weiter als die Normalparabel ($a = 0{,}5$). Da $e = 0$ ist, liegt der Scheitel auf der x-Achse.
d) $y = (x+3)^2 - 9 + 8 = (x+3)^2 - 1$, also $S(-3|-1)$. Diese Gleichung steht nicht in Scheitelform. Mit quadratischer Ergänzung (halber Faktor vor x ist 3) erhält man die Scheitelform.

Lösung zu Aufgabe 3

Man halbiert jeweils den Faktor vor x, quadriert ihn, addiert und subtrahiert ihn, und fasst zur binomischen Formel zusammen.
a) $(x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3$; $S(2|-3)$. Halber Faktor: -2, sein Quadrat 4.
b) $(x+4)^2 - 16 + 10 = (x+4)^2 - 6$; $S(-4|-6)$. Halber Faktor: 4, sein Quadrat 16.
c) $2(x^2 - 6x) + 5 = 2((x-3)^2 - 9) + 5 = 2(x-3)^2 - 13$; $S(3|-13)$. Hier klammert man zuerst den Faktor 2 aus und ergänzt nur innerhalb der Klammer; beim Ausmultiplizieren wird -9 mit 2 multipliziert.
d) $(x+1{,}5)^2 - 2{,}25$; $S(-1{,}5|-2{,}25)$. Halber Faktor: 1,5, sein Quadrat 2,25; hier ist $q = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $x^2 = 9$, also $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Ohne linearen Summanden löst man direkt durch Wurzelziehen; es gibt zwei Lösungen.
b) $x = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6} = 2{,}5 \pm 0{,}5$, also $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Mit $p = -5$ und $q = 6$ in die pq-Formel. Probe: $9 - 15 + 6 = 0$.

c) $x = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}$: keine Lösung, keine Nullstelle (Parabel liegt über der x-Achse). Die Diskriminante unter der Wurzel ist negativ, deshalb gibt es keine reelle Lösung.
d) $x = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$: eine Nullstelle (Scheitel auf der x-Achse). Die Diskriminante ist null; der Term ist die binomische Formel $(x-2)^2$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $y(2) = 2 \cdot 4 = 8$; $0{,}5 \cdot 4 = 2$; -4; $-3 \cdot 4 = -12$. Man setzt $x = 2$ ein: $2^2 = 4$ wird mit a multipliziert.
b) $a = 2$: enger. $a = 0{,}5$: weiter. $a = -1$: wie die Normalparabel, aber nach unten. $a = -3$: enger und nach unten. Für $|a| > 1$ wird die Parabel gestreckt (enger), für 0 gestaucht (weiter); ein negatives a spiegelt sie an der x-Achse.
c) $4 = a \cdot 9$, also $a = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$. Man setzt den Punkt $x = 3$, $y = 4$ in $y = ax^2$ ein und löst nach a auf.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $f(0) = 3$; $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$; $f(5) = 25 - 20 + 3 = 8$. Man setzt die x-Werte ein und rechnet die Potenz zuerst. $f(1) = 0$ bedeutet, dass 1 eine Nullstelle ist.
b) $f(-1) = 1 + 4 + 3 = 8$: ja. $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 \neq -2$: nein. Man setzt die x-Koordinate ein und vergleicht das Ergebnis mit der y-Koordinate: Stimmen sie überein, liegt der Punkt auf dem Graphen.
c) $f(x) = (x-2)^2 - 1$, also $S(2|-1)$. Nullstellen: $(x-2)^2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Die Scheitelform erhält man durch quadratische Ergänzung; die Nullstellen liegen symmetrisch zum Scheitel im Abstand 1.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $h(0) = 2$, $h(0{,}5) = 5{,}75$, $h(1) = 7$, $h(1{,}5) = 5{,}75$, $h(2) = 2$. Man setzt die Zeiten ein; die Werte sind symmetrisch zu $t = 1$.
b) $h = -5(t-1)^2 + 7$: Scheitel $S(1|7)$. Nach 1 s ist der Ball 7 m hoch. Man klammert -5 aus und ergänzt quadratisch. Antwort: Nach 1 Sekunde erreicht der Ball seine größte Höhe von 7 m.
c) $-5t^2 + 10t + 2 = 0$, $t^2 - 2t - 0{,}4 = 0$, $t = 1 \pm \sqrt{1{,}4}$; nur $t = 1 + \sqrt{1{,}4} \approx 2{,}18$ s ist sinnvoll. Man setzt $h = 0$, teilt durch -5 und löst mit der pq-Formel. Die negative Lösung entfällt, da die Zeit nicht negativ sein kann. Antwort: Nach etwa 2,18 s trifft der Ball auf.
d) $h(1{,}8) = -5 \cdot 3{,}24 + 18 + 2 = 3{,}8$ m. Antwort: Nach 1,8 s ist der Ball noch 3,8 m hoch.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $-\frac{x^2}{40} + 10 = 0$, $x^2 = 400$, $x = \pm 20$: Breite 40 m. An der Wasserlinie ist $y = 0$. Man löst nach x^2 auf und zieht die Wurzel. Antwort: Der Bogen ist an der Wasserlinie 40 m breit.

b) $y(10) = -\frac{100}{40} + 10 = 7{,}5$ m. Man setzt $x = 10$ ein. Antwort: 10 m von der Mitte entfernt ist der Bogen 7,5 m hoch.
c) $-\frac{x^2}{40} + 10 = 6$, $x^2 = 160$, $x \approx 12{,}65$; Breite $2 \cdot 12{,}65 \approx 25{,}3$ m. Man setzt $y = 6$ und löst nach x auf; die Breite ist der doppelte Abstand. Antwort: In 6 m Höhe ist der Bogen etwa 25,3 m breit.
d) $y(15) = -\frac{225}{40} + 10 = 4{,}375$ m. Antwort: Bei $x = 15$ m ist der Bogen noch etwa 4,38 m hoch.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Punkt $(0|0)$: $0 = a \cdot 9 + 2{,}5$, $a = -\frac{2{,}5}{9} = -\frac{5}{18} \approx -0{,}278$. Der Scheitel ist $S(3|2{,}5)$. Den Streckfaktor bestimmt man mit dem Punkt $(0|0)$, den der Strahl an der Düse durchläuft.
b) Nullstellen symmetrisch zum Scheitel: $x = 0$ und $x = 6$ m. Eine Parabel ist symmetrisch zu ihrem Scheitel: Die Düse liegt 3 m links, also landet der Strahl 3 m rechts davon. Antwort: bei $x = 6$ m.
c) $y = -\frac{5}{18} \cdot 2{,}25 + 2{,}5 = 1{,}875$ m. Man setzt $x = 1{,}5$ in die Gleichung ein: $(1{,}5 - 3)^2 = 2{,}25$. Antwort: Der Strahl ist dort etwa 1,88 m hoch.
d) $-\frac{5}{18}(x-3)^2 + 2{,}5 = 1{,}2$, $(x-3)^2 = \frac{1{,}3 \cdot 18}{5} = 4{,}68$, $x = 3 \pm 2{,}16$, also $x \approx 0{,}84$ und $x \approx 5{,}16$. Die Hand wird bei $0{,}84$ m (Strahl steigt) und bei $5{,}16$ m (Strahl fällt) getroffen. Man setzt $y = 1{,}2$, löst nach dem Klammerquadrat auf und zieht die Wurzel.

Lösung zu Aufgabe 10

a) 30: $9 + 9 = 18$ m; 50: $15 + 25 = 40$ m; 100: $30 + 100 = 130$ m. Die Bremswege sind 9, 25, 100 m. Man berechnet Reaktions- und Bremsweg getrennt und addiert sie.
b) Der Bremsweg wird $2^2 = 4$-mal so lang: $25 \to 100$ m bei $50 \to 100$ km/h. Da v quadriert wird, vervierfacht sich der Bremsweg bei doppelter Geschwindigkeit.
c) $0{,}01v^2 + 0{,}3v - 60 = 0$, $v^2 + 30v - 6000 = 0$, $v = -15 + \sqrt{225 + 6000} \approx 63{,}9$ km/h. Man setzt den Anhalteweg gleich 60 m, multipliziert mit 100 und löst mit der pq-Formel; nur die positive Lösung ist sinnvoll. Antwort: höchstens etwa 64 km/h.
d) $40 - 18 = 22$ m mehr (Anhalteweg bei 30: 18 m). Antwort: Bei 50 km/h ist der Anhalteweg 22 m länger als bei 30 km/h, mehr als doppelt so lang.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Länge $= 30 - 2x$: $20, 18, 15, 12$. Fläche: $100, 108, 112{,}5, 108$. Die Wandseite ist der restliche Zaun: $30 - 2x$. Die Fläche ist Länge mal Breite.
b) $A(x) = x(30 - 2x) = -2x^2 + 30x$. Man multipliziert aus und erhält eine nach unten geöffnete Parabel.
c) $A = -2(x - 7{,}5)^2 + 112{,}5$: Maximum bei $x = 7{,}5$ m (Länge 15 m), $A = 112{,}5\,\mathrm{m}^2$. Man ergänzt quadratisch; der Scheitel liefert das Maximum. Antwort: Das Gehege wird am größten, wenn es 7,5 m tief und 15 m lang ist.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $U = -10p^2 + 200p = -10(p-10)^2 + 1000$: Maximum bei $p = 10$ €, $U = 1000$ €. Man multipliziert aus, klammert -10 aus und ergänzt quadratisch. Antwort: Bei 10 € ist der Umsatz mit 1000 € am größten.
b) $G = -10p^2 + 260p - 1200$. Gewinn ist Umsatz minus Kosten: $G = U - 6 \cdot (200 - 10p)$.
c) $G = -10(p-13)^2 + 490$: $p = 13$ €, $G = 490$ € (verkauft werden 70 Shirts). Antwort: Der Gewinn ist bei 13 € pro Shirt mit 490 € am größten; der Preis für den größten Gewinn ist höher als der für den größten Umsatz.
d) $G \geq 0$: $-10(p-13)^2 + 490 \geq 0$, $(p-13)^2 \leq 49$, also $6 \leq p \leq 20$. Man löst die Ungleichung über das Klammerquadrat: $|p-13| \leq 7$. Antwort: Bei Preisen zwischen 6 € und 20 € macht der Verein keinen Verlust.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $x^2 = 2x + 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = 1 \pm 2$: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Schnittpunkte $(3|9)$ und $(-1|1)$. Man setzt die Terme gleich, bringt alles auf eine Seite und löst mit der pq-Formel; die y-Werte erhält man durch Einsetzen.
b) $x^2 = 2x - 1$, $(x-1)^2 = 0$, $x = 1$ (doppelt): g_2 berührt die Parabel im Punkt $(1|1)$ und ist die Tangente. Es gibt genau eine (doppelte) Lösung.
c) $x^2 - 2x + 4 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{1-4}$: kein Schnittpunkt. Die Diskriminante ist negativ, die Gerade verläuft also ganz unterhalb der Parabel. Eine Gerade kann eine Parabel in zwei, einem oder keinem Punkt treffen.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $y = (x-2)^2 + 3$; $y = -x^2$; $y = 2x^2 - 1$; $y = (x+3)^2$. Verschiebung nach rechts: $x - d$ in der Klammer; nach oben: $+e$; Spiegelung an der x-Achse: Minuszeichen vor dem Term; Streckung: Faktor vor x^2.
b) $S(2|3)$; $S(0|0)$; $S(0|-1)$; $S(-3|0)$. Den Scheitel liest man aus der Scheitelform ab.
c) Die Normalparabel, an der x-Achse gespiegelt, 2 nach rechts und 5 nach oben verschoben (nach unten geöffnet, Maximum 5). Man liest die Gleichung schrittweise: Das Minus bedeutet Spiegelung, $(x-2)$ Verschiebung nach rechts, $+5$ Verschiebung nach oben.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $-\frac{3}{8}x^2 + 6 = 0$, $x^2 = 16$, $x = \pm 4$: Breite 8 m, Höhe 6 m. An der Fahrbahn ist $y = 0$; die Höhe in der Mitte ist der Scheitel $y(0) = 6$.
b) Am Rand des Lkw ($x = 1{,}5$): $y = -\frac{3}{8} \cdot 2{,}25 + 6 = 5{,}156$ m $> 4{,}5$ m. Er passt. Der Lkw fährt mittig, seine Ecken liegen bei $x = \pm 1{,}5$. Dort muss der Tunnel höher sein als der Lkw.
c) $y(1{,}6) = -\frac{3}{8} \cdot 2{,}56 + 6 = 5{,}04$ m. Antwort: 1,6 m von der Mitte ist der Tunnel etwa 5,04 m hoch.
d) $-\frac{3}{8}x^2 + 6 = 4{,}5$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$: Breite 4 m. Man setzt $y = 4{,}5$ und löst nach x auf.

Antwort: In dieser Höhe ist der Tunnel 4 m breit.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $h(0) = 1{,}8$, $h(5) = -1{,}25 + 4{,}5 + 1{,}8 = 5{,}05$, $h(10) = -5 + 9 + 1{,}8 = 5{,}8$, $h(15) = -11{,}25 + 13{,}5 + 1{,}8 = 4{,}05$, $h(20) = -20 + 18 + 1{,}8 = -0{,}2$. Man setzt die Weiten ein; der negative Wert bei 20 m zeigt, dass die Kugel vorher schon gelandet ist.
b) $h = -0{,}05(x-9)^2 + 5{,}85$: Scheitel $S(9|5{,}85)$, also maximal $5{,}85$ m hoch. Man klammert $-0{,}05$ aus und ergänzt quadratisch. Antwort: Die größte Höhe von 5,85 m wird nach 9 m Weite erreicht.
c) $x^2 - 18x - 36 = 0$, $x = 9 + \sqrt{81 + 36} = 9 + \sqrt{117} \approx 19{,}82$ m. Man setzt $h = 0$, multipliziert mit -20 und löst mit der pq-Formel; nur die positive Lösung ist sinnvoll. Antwort: Die Kugel fliegt etwa 19,8 m weit.
d) $-0{,}05x^2 + 0{,}9x + 1{,}8 = 2{,}5$, $x^2 - 18x + 14 = 0$, $x = 9 \pm \sqrt{67}$; rechts: $x \approx 17{,}19$ m. Unter $2{,}5$ m liegt sie am Anfang (bis $x \approx 0{,}81$ m) und ab $17{,}2$ m bis zum Aufprall. Man setzt $h = 2{,}5$ und erhält zwei Lösungen, links und rechts vom Scheitel.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $h(9{,}15) = -0{,}02 \cdot 83{,}72 + 4{,}575 \approx 2{,}90$ m. Das sind mehr als $1{,}85$ m, der Ball fliegt über die Mauer. Man setzt die Entfernung der Mauer ein und vergleicht mit der Mauerhöhe.
b) $h(20) = -8 + 10 = 2{,}0$ m m: Der Ball geht ins Tor, unter die Latte. Man setzt $x = 20$ ein und vergleicht mit der Torhöhe.
c) $h = -0{,}02(x - 12{,}5)^2 + 3{,}125$: Scheitel $S(12{,}5|3{,}125)$. Man klammert $-0{,}02$ aus und ergänzt quadratisch; der höchste Punkt liegt 12,5 m vom Schusspunkt entfernt.
d) $h(19) = -0{,}02 \cdot 361 + 9{,}5 = 2{,}28$ m $> 2{,}2$ m: Der Torwart kommt nicht heran. Man setzt die Position des Torwarts ein und vergleicht mit seiner Reichhöhe.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Breite 4 m ($x = \pm 2$); Tiefe 1 m (Scheitel $S(0|-1)$). An der Wasserlinie ist $y = 0$, also $x^2 = 4$; die Tiefe ist der Betrag des Scheitelwerts.
b) $A = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 1 = 2{,}67\,\mathrm{m}^2$; $V = 2{,}67 \cdot 6 \approx 16\,\mathrm{m}^3$. Querschnittsfläche mal Länge ergibt das Volumen. Antwort: Der Teich fasst etwa 16 m³ Wasser.
c) Wasserstand bei $y = -0{,}5$: $\frac{1}{4}x^2 = 0{,}5$, $x^2 = 2$, $x = \pm 1{,}41$; Breite $\approx 2{,}83$ m. Bei halb so hohem Wasserstand setzt man $y = -0{,}5$. Die Breite verringert sich nicht auf die Hälfte, sondern nur auf etwa 2,83 m.
d) $y(1) = \frac{1}{4} - 1 = -0{,}75$ m, also $0{,}75$ m tief. Man setzt $x = 1$ ein; der Betrag des y-Werts ist die Tiefe.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Ball: $h_B(0) = 1$; $h_B(1) = -5 + 12 + 1 = 8$; $h_B(2) = -20 + 24 + 1 = 5$; $h_B(3) = -45 + 36 + 1 = -8$. Drohne: $1, 3, 5, 7$. Man setzt die Zeiten in beide Funktionen ein. Der negative Wert bei $t = 3$ zeigt, dass der Ball vorher gelandet ist.

b) $-5t^2+12t+1=2t+1$, $-5t^2+10t=0$, $t(-5t+10)=0$: $t=0$ s und $t=2$ s; Höhe jeweils 1 m und 5 m. Man setzt die Höhen gleich und klammert t aus. Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist.
c) Zwischen $t=0$ und $t=2$ s ist der Ball höher. Zum Beispiel bei $t=1$: Ball 8 m, Drohne 3 m.
d) Scheitel bei $t=\frac{12}{10}=1{,}2$ s mit $h=-7{,}2+14{,}4+1=8{,}2$ m. Der Scheitel liegt bei $t=-\frac{b}{2a}=\frac{12}{10}$. Antwort: Der Ball erreicht nach 1,2 s seine größte Höhe von 8,2 m.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $c=3$. Für $x=0$ bleibt nur c übrig; also ist c gleich der y-Koordinate von A.
b) $a+b+3=0$, also $a+b=-3$; $16a+4b+3=3$, also $4a+b=0$. Subtrahiert: $3a=3$, $a=1$, $b=-4$. Man setzt B und C in die Gleichung ein und löst das lineare Gleichungssystem mit dem Subtraktionsverfahren.
c) $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$, $S(2|-1)$; Nullstellen $x_1=1$, $x_2=3$. Die Probe mit allen drei Punkten bestätigt die Gleichung.
d) $c=3$; $a+b=-3$; $16a+4b=5$, also $4a+b=1{,}25$. $3a=4{,}25$, $a=1{,}417$, $b=-3-a=-4{,}417$. Man geht genauso vor wie in b), nur mit dem geänderten Punkt.