# Lösungen zur Klassenarbeit - Pyramide, Kegel und Kugel

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

## Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Die Grundfläche ist ein Quadrat: $G = 12^2 = 144\,\text{cm}^2$. Für jede Pyramide gilt $V = \frac{1}{3}Gh$, also $V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384\,\text{cm}^3$ (2 P.).
b) Die Seitenhöhe $h_s$ steht auf der Mitte einer Grundkante. Sie ist Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\frac{12}{2} = 6$ cm und $h = 8$ cm: $h_s = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ cm (1 P.). Der Mantel besteht aus vier kongruenten Dreiecken: $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 240\,\text{cm}^2$. Oberfläche gleich Grundfläche plus Mantel: $O = 144 + 240 = 384\,\text{cm}^2$ (1 P.). Achtung: Volumen und Oberfläche haben hier nur zufällig dieselbe Maßzahl. Antwort: $V = 384\,\text{cm}^3$, $h_s = 10$ cm, $M = 240\,\text{cm}^2$, $O = 384\,\text{cm}^2$.

## Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Radius, Höhe und Mantellinie bilden ein rechtwinkliges Dreieck, in dem $s$ der Hypotenuse entspricht. Nach Pythagoras: $s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$ cm (1 P.).
b) Volumen eines Kegels: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 49 \cdot 24 = 392\pi \approx 1231{,}5\,\text{cm}^3$ (2 P.: Formel und Ergebnis). Der Mantel ist ein abgewickelter Kreisausschnitt mit dem Flächeninhalt $M = \pi r s = \pi \cdot 7 \cdot 25 = 175\pi \approx 549{,}8\,\text{cm}^2$ (1 P.). Häufiger Fehler: in $M = \pi r s$ die Höhe $h = 24$ statt der Mantellinie $s = 25$ einsetzen. Antwort: Die Mantellinie misst $25$ cm, das Volumen beträgt rund $1231{,}5\,\text{cm}^3$, die Mantelfläche rund $549{,}8\,\text{cm}^2$.

## Lösung zu Aufgabe 3 (3 BE/Punkte)

a) Vom Durchmesser $20$ cm geht man zum Radius $r = 10$ cm über. Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1000 \approx 4188{,}8\,\text{cm}^3$ (1 P.). Weil $1000\,\text{cm}^3 = 1\,\text{dm}^3 = 1$ l gilt, sind das etwa $4{,}19$ l (1 P.).
b) Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß wie ihre Großkreisfläche: $O = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 100 = 400\pi \approx 1256{,}6\,\text{cm}^2$ (1 P.). Kontrolle der Größenordnung: Ein Würfel mit Kante $20$ cm hätte $8$ l Volumen; die Kugel passt hinein und hat gut die Hälfte davon, das ist plausibel. Antwort: etwa $4{,}19$ l und rund $1257\,\text{cm}^2$.

## Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Das Silo wird in zwei Teilkörper zerlegt. Zylinder: $V_Z = \pi r^2 h = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 11{,}25\pi \approx 35{,}34\,\text{m}^3$ (1 P.). Eine Halbkugel hat das halbe Kugelvolumen: $V_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3{,}375 \approx 7{,}07\,\text{m}^3$ (1 P.). Gesamt:

$V \approx 35{,}34 + 7{,}07 = 42{,}41\,\mathrm{m}^3$ (1 P.).
b) Außen sichtbar sind der Zylindermantel und die gewölbte Halbkugelfläche; die Bodenfläche und die Kreisfläche zwischen den Teilen zählen nicht. Mantel: $2\pi r h = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 5 \approx 47{,}12\,\mathrm{m}^2$. Halbkugel: $2\pi r^2 = 2\pi \cdot 2{,}25 \approx 14{,}14\,\mathrm{m}^2$. Summe: $61{,}26\,\mathrm{m}^2$ (2 P.). Antwort: Das Silo fasst etwa $42{,}4\,\mathrm{m}^3$, man braucht rund $61{,}3\,\mathrm{m}^2$ Blech.

## Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Man stellt die Volumenformel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nach $h$ um: Mal $3$, dann durch $\pi r^2$ teilen ergibt $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ (1 P.). Einsetzen: $h = \frac{3 \cdot 100{,}5}{\pi \cdot 16} = \frac{301{,}5}{50{,}27} \approx 6{,}0$ cm (1 P.).
b) Aus $O = 4\pi r^2$ folgt $r^2 = \frac{O}{4\pi} = \frac{314{,}16}{12{,}566} \approx 25$, also $r = 5$ cm, da nur die positive Wurzel als Länge sinnvoll ist (1 P.). Damit wird $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi \approx 523{,}6\,\mathrm{cm}^3$ (1 P.). Probe für a): $\frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 6 \approx 100{,}5$, passt. Antwort: Der Kegel ist $6$ cm hoch; die Kugel hat $r = 5$ cm und $V \approx 523{,}6\,\mathrm{cm}^3$.