Lernzettel - Pyramide, Kegel und Kugel

Klasse: Klasse 9

Du berechnest Volumen und Oberfläche von Pyramide, Kegel und Kugel. Ein Zusammenhang hilft dir: Eine Pyramide fasst genau ein Drittel des Prismas mit gleicher Grundfläche und Höhe, ein Kegel ein Drittel des Zylinders mit gleichem Radius und gleicher Höhe.

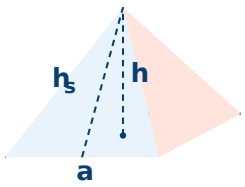
Einstieg: Warum ist eine Eistüte nicht größer?

Lena bestellt eine Eiskugel in der Waffeltüte. Die Kugel hat einen Radius von $2{,}5$ cm, die Tüte ist 10 cm hoch und hat oben auch $2{,}5$ cm Radius. Passt das geschmolzene Eis genau in die Tüte? Wer das ausrechnet, entdeckt etwas Überraschendes: Das Volumen der Kugel beträgt $\frac{4}{3}\pi \cdot 2{,}5^3 \approx 65{,}4\,\text{cm}^3$, das der Tüte $\frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 10 \approx 65{,}4\,\text{cm}^3$. Beide sind gleich. In diesem Kapitel lernst du, Rauminhalt und Oberfläche von Pyramide, Kegel und Kugel zu berechnen. Dazu brauchst du den Satz des Pythagoras, denn die schräge Höhe einer Pyramide und die Mantellinie des Kegels ergeben sich aus rechtwinkligen Dreiecken im Körper.

Die Pyramide

Definition: Pyramide

Eine **Pyramide** hat eine Grundfläche G (Dreieck, Quadrat, Rechteck oder Vieleck), Seitenflächen aus Dreiecken, die in der **Spitze** zusammenlaufen, und die **Höhe** h (senkrechter Abstand der Spitze von der Grundfläche). Die Seitenflächen bilden zusammen die **Mantelfläche** M.



Satz: Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \qquad O = G + M$$

Bei einer quadratischen Pyramide mit Grundkante a ist die Seitenhöhe $h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ und $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 2ah_s$.

Beispiel 1: Pyramide

Eine quadratische Pyramide hat $a = 10$ cm und $h = 12$ cm.

$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$ cm³.

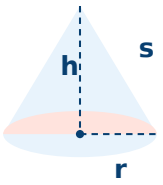
Seitenhöhe: $h_s = \sqrt{144 + 25} = 13$ cm. Mantel: $M = 2 \cdot 10 \cdot 13 = 260$ cm².

Oberfläche: $O = 100 + 260 = 360$ cm².

Der Kegel

Definition: Kegel

Ein **Kegel** hat einen Kreis mit Radius r als Grundfläche, die Höhe h und die **Mantellinie** s mit $s^2 = r^2 + h^2$. Wickelt man den Mantel ab, erhält man einen Kreisausschnitt mit Radius s und Bogenlänge $2\pi r$, sein Mittelpunktswinkel ist $\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$.



Satz: Kegel

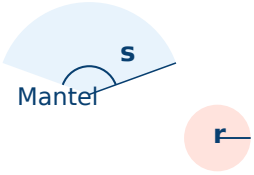
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad M = \pi r s \qquad O = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$$

Beispiel 2: Kegel

Ein Kegel hat $r = 3$ cm und $h = 4$ cm.

Mantellinie: $s = \sqrt{9 + 16} = 5$ cm.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi \approx 37{,}70$ cm³, $M = 15\pi \approx 47{,}12$ cm², $O = 24\pi \approx 75{,}40$ cm².

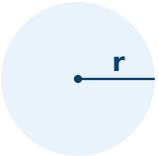


Die Kugel

Satz: Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad O = 4\pi r^2$$

Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß wie die Fläche des größten Kreises in ihr.



Beispiel 3: Kugel

Berechne Volumen und Oberfläche einer Kugel mit $r = 6$ cm.

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 = 288\pi \approx 904{,}78$ cm³.

$O = 4\pi \cdot 36 = 144\pi \approx 452{,}39$ cm². Ist der Durchmesser gegeben, halbiere ihn zuerst.

So gehst du vor: Gesuchte Größe zurückrechnen

1. Schreibe die Formel auf und setze das Gegebene ein.
2. Kürze π und stelle nach der gesuchten Größe um.
3. Ziehe bei r^3 die dritte Wurzel.
4. Mache die Probe mit der Ausgangsformel.

Beispiel 4: Radius und Höhe

Eine Kugel hat $V = 36\pi$ cm³. Ein Kegel mit $r = 5$ cm hat $V = 100$ cm³. Gesucht sind r und h.

Kugel: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$, also $r^3 = 27$ und $r = 3$ cm.

Kegel: $100 = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot h$, also $h = \frac{12}{\pi} \approx 3{,}82$ cm.

Zusammengesetzte Körper

Regel: Zusammengesetzte Körper

Viele Körper bestehen aus bekannten Körpern: Silo (Zylinder mit Kegel), Eistüte (Kegel mit Halbkugel), Zelt (Prisma mit Pyramide). Du berechnest die Teile einzeln und addierst die Volumen. Bei der Oberfläche zählst du nur die Außenflächen: Flächen, an denen Körper zusammenstoßen, fallen weg.

Beispiel 5: Silo

Ein Silo besteht aus einem Zylinder ($r = 2$ m, $h = 5$ m) mit aufgesetztem Kegel (Höhe 3 m).

$V = \pi \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 3 = 20\pi + 4\pi = 24\pi \approx 75{,}40$ m³.

Beispiel 6: Halbkugel

Berechne Volumen und Oberfläche einer Halbkugel mit $r = 4$ cm.

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{128}{3}\pi \approx 134{,}04$ cm³.

Die Oberfläche besteht aus der halben Kugeloberfläche und der ebenen Kreisfläche: $O = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2 = 48\pi \approx 150{,}80$ cm².

Merke: Maße verändern

Wird der Radius einer Kugel verdoppelt, wird die Oberfläche 4-mal so groß (2^2) und das Volumen 8-mal so groß (2^3). Das ist derselbe Zusammenhang wie bei der zentrischen Streckung: Flächen wachsen mit k^2, Volumen mit k^3.

Der Pythagoras im Körper

Bei Pyramide und Kegel sitzen rechtwinklige Dreiecke im Körper verborgen. In der Pyramide mit quadratischer Grundfläche bilden die Höhe h, die halbe Grundkante $\frac{a}{2}$ und die Seitenhöhe h_s ein rechtwinkliges Dreieck: $h_s^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$. Die Seitenkante k liegt in einem Dreieck mit der Höhe und der halben Diagonale $\frac{a}{2}\sqrt{2}$: $k^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$. Im Kegel gilt $s^2 = r^2 + h^2$. Zeichne diese Dreiecke immer heraus und beschrifte sie, dann findest du die richtige Rechnung.

Beispiel 7: Seitenkante

Berechne die Seitenkante einer quadratischen Pyramide mit $a = 6$ cm und $h = 4$ cm.

Die halbe Diagonale ist $\frac{6}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ cm. Dann gilt

$k = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 18} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ cm.

Der Kegelmantel als Kreisausschnitt

Rollst du einen Kreisausschnitt mit dem Radius s zusammen, entsteht ein Kegelmantel. Die Bogenlänge des Ausschnitts wird zum Umfang des Grundkreises: $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi s = 2\pi r$. Daraus folgt der Winkel $\alpha = 360° \cdot \frac{r}{s}$. Die Fläche des Ausschnitts ist der Mantel $M = \pi r s$.

Beispiel 8: Hut aus Pappe

Ein Partyhut hat $r = 6$ cm und $s = 15$ cm. Welchen Winkel hat der Ausschnitt, wie viel Pappe braucht man?

$\alpha = 360° \cdot \frac{6}{15} = 144°$. Fläche $M = \pi \cdot 6 \cdot 15 = 90\pi \approx 282{,}7\,\text{cm}^2$.

Zusammengesetzte Körper

Viele Gegenstände sind aus mehreren Grundkörpern zusammengesetzt: ein Silo aus Zylinder und Kegel, ein Wasserturm aus Zylinder und Halbkugel, ein Haus aus Quader und Pyramide. Du berechnest die Volumina einzeln und addierst sie. Bei der Oberfläche lässt du die Flächen weg, an denen die Körper zusammenstoßen. Eine Halbkugel hat das halbe Volumen $\frac{2}{3}\pi r^3$, aber die Oberfläche $2\pi r^2$ (ohne Schnittfläche).

Beispiel 9: Spielzeugrakete

Eine Rakete besteht aus einem Zylinder ($r = 2$ cm, $h = 10$ cm) mit aufgesetzter Kegelspitze ($h = 3$ cm). Berechne das Volumen.

Zylinder: $\pi \cdot 4 \cdot 10 = 40\pi$. Kegel: $\frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 3 = 4\pi$. Gesamt $44\pi \approx 138{,}2\,\text{cm}^3$.

Vergleich der Körper

Bei gleicher Grundfläche und Höhe hat der Kegel ein Drittel des Zylindervolumens, die Pyramide ein Drittel des Prismas. Die Kugel mit Radius r hat zwei Drittel des Volumens des umschließenden Zylinders (r, $h = 2r$). Mit diesen Verhältnissen kannst du Ergebnisse überschlagen und Rechenfehler finden.

Typische Fehler und Proben

Der häufigste Fehler ist die Verwechslung von Höhe und Mantellinie beziehungsweise Seitenhöhe. Für das Volumen brauchst du immer die senkrechte Höhe h, für den Mantel die schräge Länge s oder h_s. Ein zweiter Fehler: das Dritteln beim Volumen von Pyramide und Kegel zu vergessen. Eine Probe: Das Volumen von Pyramide oder Kegel muss kleiner sein als das des umschließenden Prismas oder Zylinders, und bei einer Kugel muss das Ergebnis kleiner als das des umschließenden Würfels mit Kantenlänge $2r$ sein.

Beispiel 10: Probe mit dem umschließenden Körper

Ein Schüler berechnet für eine Kugel mit $r = 5$ cm das Volumen $1570\,\text{cm}^3$. Stimmt das?

Der umschließende Würfel hat die Kantenlänge 10 cm und das Volumen $1000\,\text{cm}^3$. Die Kugel kann nicht größer sein. Er hat $\pi r^2 \cdot 2r \cdot \ldots$ falsch verrechnet. Richtig: $\frac{4}{3}\pi \cdot 125 \approx 523{,}6\,\text{cm}^3$.

Wusstest du?

Archimedes von Syrakus war so stolz auf seine Entdeckung über Kugel und Zylinder, dass er sich beides auf seinen Grabstein meißeln ließ. Die ägyptischen Baumeister der Cheops-Pyramide kannten die Pyramidenformel schon rund 2000 Jahre früher, wie ein altes Papyrus zeigt.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Pyramide: $V = \frac{1}{3}Gh$; Oberfläche $O = G + M$, Mantel aus Dreiecken mit der Seitenhöhe h_s.
- Seitenhöhe der quadratischen Pyramide: $h_s = \sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2}$.
- Kegel: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $M = \pi r s$, $O = \pi r^2 + \pi r s$ mit $s = \sqrt{r^2 + h^2}$.
- Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$.
- Pyramide und Kegel haben ein Drittel des Volumens des zugehörigen Prismas bzw. Zylinders.
- Bei Streckung mit k wächst O mit k^2 und V mit k^3.
- Zusammengesetzte Körper: Teilkörper einzeln berechnen und addieren, verdeckte Flächen weglassen.
- Zurückrechnen: Formel umstellen, bei Kugeln die dritte Wurzel ziehen.

Achtung

Vergiss den Faktor $\frac{1}{3}$ bei Pyramide und Kegel nicht. Verwende im Volumen die Körperhöhe h, nicht die Seitenhöhe h_s oder die Mantellinie s. Verwechsle bei der Kugel Durchmesser und Radius nicht. Berechne s mit Pythagoras, addiere nicht einfach r und h. Runde erst am Ende.

Zum Einstieg: Der Umschüttversuch

Bastle aus Karton eine hohle Pyramide und ein hohles Prisma mit derselben quadratischen Grundfläche und derselben Höhe. Fülle die Pyramide mit Sand oder Reis und schütte den Inhalt in das Prisma. Du wirst feststellen, dass du genau dreimal schütten musst, bis das Prisma voll ist. Dasselbe gilt für Kegel und Zylinder. Daher stammt der Faktor $\frac{1}{3}$ in den Volumenformeln von Pyramide und Kegel. Dieser Versuch ist zwar kein Beweis, macht die Formel aber sehr anschaulich.

Beispiel 11

Eine Kerze besteht aus einem Zylinder mit 3 cm Radius und 10 cm Höhe und einer aufgesetzten Halbkugel mit demselben Radius. Wie viel Wachs braucht man?

Wir zerlegen die Kerze in zwei einfache Körper. Das Volumen des Zylinders ist $\pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi$. Die Halbkugel hat die Hälfte eines Kugelvolumens, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi$. Zusammen sind es $108\pi \approx 339{,}3\,\text{cm}^3$. Antwort: Man braucht ungefähr 340 cm³ Wachs.

So gehst du bei zusammengesetzten Körpern vor

1. Zerlege den Körper in bekannte Teilkörper wie Zylinder, Kegel, Pyramide oder

Halbkugel.
2. Notiere für jeden Teilkörper die Maße, die du brauchst, und berechne fehlende Längen mit dem Satz des Pythagoras.
3. Berechne die Volumina einzeln und addiere sie (bei Hohlräumen subtrahierst du).
4. Bei der Oberfläche zählst du nur die Flächen, die außen sichtbar sind.

Häufige Fehler

Verwechsle nicht die Höhe h mit der Seitenhöhe h_s bzw. der Mantellinie s. Bei Angaben mit Durchmesser musst du zuerst halbieren. Und achte auf die Einheiten: 1 Liter entspricht 1000 cm³ bzw. 1 dm³.

Schon gewusst?

Archimedes war so stolz auf seine Entdeckung, dass Kugel und Zylinder gleicher Höhe im Volumenverhältnis 2 zu 3 stehen, dass er sich eine Kugel in einem Zylinder auf seinen Grabstein wünschte. Die Cheops-Pyramide war fast 4000 Jahre lang das höchste Bauwerk der Welt. Und Seifenblasen sind rund, weil die Kugel bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche hat. Auch Planeten und große Monde sind annähernd kugelförmig, weil ihre eigene Schwerkraft alle Teile möglichst nah zum Mittelpunkt zieht.

Ottos Tipp

Skizziere den Körper und zeichne das rechtwinklige Dreieck, das die Höhe, den Radius (oder die halbe Kante) und die Mantellinie (oder Seitenhöhe) enthält. Dort steckt immer Pythagoras. Schreibe die Formel erst allgemein hin und setze dann ein. So bekommst du auch Teilpunkte.