Arbeitsblatt - Pyramide, Kegel und Kugel

Klasse: Klasse 9 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Pyramiden: Volumen

Das Volumen einer Pyramide ist $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ mit der Grundfläche G und der Höhe h. Berechne.

	Grundfläche	Höhe
a)	Quadrat mit $a = 6$ cm	9 cm
b)	Quadrat mit $a = 10$ cm	12 cm
c)	Rechteck 8 cm × 5 cm	6 cm
d)	$G = 48\,\text{cm}^2$	7 cm

a) Berechne alle vier Volumina.
b) Wie ändert sich das Volumen in a), wenn die Höhe verdoppelt wird?
c) Wie viele gleiche Pyramiden wie in a) passen volumengleich in einen Würfel mit der Kantenlänge 6 cm?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Kegel: Volumen

Das Volumen eines Kegels ist $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Runde auf zwei Nachkommastellen.

a) $r = 3$ cm, $h = 7$ cm
b) $r = 5$ cm, $h = 12$ cm
c) Durchmesser 8 cm, $h = 9$ cm
d) Wie verhält sich das Volumen zu einem Zylinder mit gleichem r und h?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Kugel: Volumen und Oberfläche

Für die Kugel gilt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$.

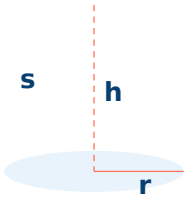
	Angabe
a)	$r = 3$ cm
b)	$r = 5$ cm
c)	$d = 12$ cm

a) Berechne Volumen und Oberfläche (zwei Nachkommastellen).
b) Was passiert mit V und O, wenn der Radius verdoppelt wird?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Mantellinie und Oberfläche des Kegels

Im Kegel gilt $s^2 = r^2 + h^2$. Mantel $M = \pi r s$, Oberfläche $O = \pi r^2 + \pi r s$.

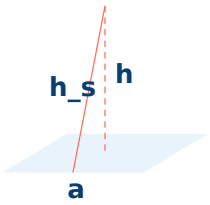


a) Berechne s für $r = 6$ cm und $h = 8$ cm.
b) Berechne Mantelfläche und Oberfläche.
c) Berechne h für $r = 5$ cm und $s = 13$ cm.
d) Wie groß ist M, wenn s doppelt so lang ist (bei gleichem r)?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Pyramide: Seitenhöhe und Oberfläche

Eine quadratische Pyramide hat die Grundkante $a = 8$ cm und die Höhe $h = 3$ cm. Die Seitenhöhe h_s ist die Höhe einer Seitenfläche.



a) Berechne h_s mit dem Satz des Pythagoras (halbe Grundkante und Höhe).
b) Berechne die Mantelfläche (vier Dreiecke).
c) Berechne die Oberfläche.
d) Berechne das Volumen.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Zurückrechnen

Wenn das Volumen gegeben ist, stellst du die Formel um.

Körper	gegeben	gesucht
Kegel	$V = 150{,}8\,\text{cm}^3$, $r = 4$ cm	h
Kugel	$V = 904{,}78\,\text{cm}^3$	r
Pyramide	$V = 96\,\text{cm}^3$, $G = 36\,\text{cm}^2$	h

a) Berechne die gesuchten Größen.
b) Ein Kegel hat $V = 100\pi\,\text{cm}^3$ und $h = 12$ cm. Berechne r.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die Eistüte

Eine Waffeltüte ist ein Kegel mit dem Radius $2{,}5$ cm und der Höhe 10 cm. Darauf liegt eine Eiskugel mit dem Radius $2{,}5$ cm. Eine Kugel kostet $1{,}20$ €.

a) Berechne das Volumen der Tüte.
b) Berechne das Volumen der Eiskugel.
c) Warum läuft das Eis nicht über, wenn es schmilzt und in die Tüte fließt?
d) Wie viel kostet 1 Liter Eis (1 Liter $= 1000\,\text{cm}^3$)?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Das Zelt

Ein Pyramidenzelt hat eine quadratische Grundfläche mit der Kantenlänge 3 m und ist $2{,}4$ m hoch. Die Zeltplane kostet 14 € pro m^2, das Zelt hat keinen Boden.

a) Berechne das Volumen des Zeltes (Luftraum).
b) Berechne die Seitenhöhe einer Dreiecksfläche.
c) Wie groß ist die Planenfläche?
d) Was kostet die Plane?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der Fußball

Ein Fußball hat einen Umfang von 69 cm. Er ist eine Kugel.

a) Berechne den Radius mit $u = 2\pi r$.
b) Berechne die Oberfläche (Leder).
c) Berechne das Volumen in Litern.
d) Ein Ball besteht aus 32 Flächen (12 Fünfecke und 20 Sechsecke). Wie groß ist durchschnittlich eine Fläche?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Der Getreidesilo

Ein Silo besteht aus einem Zylinder ($r = 2$ m, $h = 6$ m) mit einem aufgesetzten Kegeldach (Höhe $1{,}5$ m). Weizen hat eine Dichte von etwa 750 kg pro m^3.

Teil	Maße
Zylinder	r = 2 m, h = 6 m
Kegeldach	r = 2 m, h = 1,5 m

a) Berechne das Volumen des Zylinders und des Kegels.

b) Wie viele Tonnen Weizen fasst das Silo (komplett gefüllt)?
c) Berechne die Mantellinie des Dachs und die Blechfläche für Zylindermantel und Dach.
d) Ein Mähdrescher liefert 8 t pro Fahrt. Wie viele Fahrten bis zum vollen Silo?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Erde und Mond

Die Erde ist näherungsweise eine Kugel mit dem Radius 6371 km, der Mond mit 1737 km. Etwa $71\,\%$ der Erdoberfläche sind mit Wasser bedeckt.

Himmelskörper	Radius
Erde	6371 km
Mond	1737 km

a) Berechne die Oberfläche der Erde (in Millionen km^2).
b) Wie groß ist die Wasserfläche?
c) Wie viele Monde passen volumenmäßig in die Erde?
d) Wie groß ist die Oberfläche des Mondes im Vergleich zu der der Erde?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Das Turmdach

Ein Kirchturm hat ein Pyramidendach über einem quadratischen Grundriss ($a = 4$ m) mit der Höhe 6 m. Das Dach wird mit Kupferblech gedeckt (85 € pro m^2).

a) Berechne die Seitenhöhe.
b) Berechne die Dachfläche.
c) Wie hoch sind die Materialkosten?
d) Wie groß ist der Rauminhalt unter dem Dach?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Das Sektglas

Ein kegelförmiges Glas hat den Radius 4 cm und die Höhe 9 cm (Spitze unten). Es wird mit Wasser gefüllt.

Füllhöhe	Radius der Oberfläche	Volumen
9 cm	4 cm	?
6 cm	?	?

a) Berechne das Volumen bei voller Füllung in ml ($1\,\mathrm{cm}^3 = 1$ ml).
b) Bestimme Radius und Volumen bei Füllhöhe 6 cm.
c) Zeige, dass das Volumenverhältnis $\left(\frac{6}{9}\right)^3$ beträgt.
d) Bis zu welcher Höhe muss man füllen, damit genau 100 ml im Glas sind?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Kugel im Würfel

In einen Würfel mit der Kantenlänge 10 cm passt genau eine Kugel (sie berührt alle Seitenflächen).

a) Berechne Volumen und Oberfläche des Würfels.
b) Berechne Volumen und Oberfläche der Kugel.
c) Wie viel Prozent des Würfelvolumens füllt die Kugel?
d) Wie viel Prozent der Würfeloberfläche ist die Kugeloberfläche? Was fällt auf?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der Sandhaufen

Auf einer Baustelle schüttet ein Bagger einen kegelförmigen Sandhaufen auf. Er hat 4 m Durchmesser und ist $1{,}5$ m hoch. Sand wiegt etwa $1{,}6$ t pro m^3. Ein Lastwagen transportiert höchstens 8 t.

Größe	Wert
Durchmesser	4 m
Höhe	1,5 m
Dichte	1,6 t/m³

a) Berechne das Volumen des Haufens.
b) Berechne die Masse.
c) Wie viele Lastwagen-Fahrten sind nötig, um den Haufen abzufahren?
d) Der Haufen wird mit einer Plane abgedeckt. Berechne die Mantelfläche. Was kostet die Plane bei $3{,}20$ € pro m^2?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Der Wasserbehälter

Ein Wasserbehälter besteht aus einem Zylinder ($r = 3$ m, $h = 4$ m) und einer aufgesetzten Halbkugel mit demselben Radius. Eine Pumpe füllt 20 Liter pro Sekunde.

Teil	Maße
Zylinder	r = 3 m, h = 4 m
Halbkugel	r = 3 m

a) Berechne das Gesamtvolumen in Kubikmetern und Litern.
b) Wie lange dauert das Füllen (in Stunden)?
c) Berechne die Außenfläche (Zylindermantel und Halbkugel) für den Anstrich.
d) Ein Liter Farbe reicht für $6\,\mathrm{m}^2$. Wie viele Liter werden gebraucht?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Die Cheops-Pyramide

Die Cheops-Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit der Kantenlänge 230 m und ist ursprünglich 139 m hoch. Der Stein hat eine Dichte von etwa $2{,}5$ t pro m^3.

Größe	Wert
Grundkante	230 m
Höhe	139 m
Dichte	2,5 t/m³

a) Berechne das Volumen.
b) Wie viele Tonnen Stein sind verbaut?
c) Berechne die Seitenhöhe und die Mantelfläche.
d) Der Bau dauerte etwa 20 Jahre. Wie viele $1\text{-}\mathrm{m}^3$-Blöcke mussten pro Tag verbaut werden (365 Tage pro Jahr)?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Archimedes: Kegel, Kugel, Zylinder

Archimedes entdeckte: Passen ein Kegel, eine Kugel und ein Zylinder in dieselbe Höhe $2r$ mit demselben Radius r, so verhalten sich die Volumina wie $1 : 2 : 3$. Prüfe das mit $r = 4$ cm.

Körper	Radius	Höhe
Kegel	4 cm	8 cm
Kugel	4 cm	8 cm (Durchmesser)
Zylinder	4 cm	8 cm

a) Berechne die drei Volumina.
b) Zeige das Verhältnis $1 : 2 : 3$ allgemein mit r.
c) Ein Zylinderglas ($r = 5$ cm) ist 10 cm hoch mit Wasser gefüllt. Eine Kugel mit $r = 3$ cm wird eingetaucht. Um wie viel Zentimeter steigt das Wasser?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Die Eistüte aus Papier

Ein Papiertrichter entsteht aus einem Kreisausschnitt (Sektor) mit dem Radius $s = 10$ cm. Er wird zu einem Kegel mit dem Grundkreisradius $r = 4$ cm gerollt.

a) Berechne die Höhe des Kegels.
b) Welchen Mittelpunktswinkel hat der Kreisausschnitt? (Bogenlänge $= 2\pi r$)
c) Wie groß ist die Papierfläche und das Volumen des Trichters?
d) Aus einem Bogen von $0{,}6\,\mathrm{m}^2$ sollen möglichst viele Trichter geschnitten werden. Wie viele gehen höchstens hinein (ohne Verschnitt)?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Würfel oder Kugel?

Eine Kugel mit dem Radius 5 cm und ein Würfel haben das gleiche Volumen.

a) Berechne die Kantenlänge des Würfels.
b) Vergleiche die Oberflächen. Welcher Körper hat die kleinere Oberfläche?
c) Der Radius der Kugel wird verdoppelt. Um welchen Faktor wächst das Volumen? Wie muss der Radius wachsen, damit das Volumen sich verdoppelt?
d) Warum sind Seifenblasen und Wassertropfen rund?