Lösungen - Pyramide, Kegel und Kugel

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

a) Der Reihe nach: a) $\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 9 = 108\,\text{cm}^3$; b) $\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400\,\text{cm}^3$; c) $\frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 6 = 80\,\text{cm}^3$; d) $\frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 7 = 112\,\text{cm}^3$. Zuerst wird jeweils die Grundfläche berechnet: $6^2 = 36$, $10^2 = 100$, $8 \cdot 5 = 40$ und 48 cm². Danach multipliziert man mit der Höhe und teilt durch 3, denn eine Pyramide hat nur ein Drittel des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und Höhe.
b) Es verdoppelt sich auf $216\,\text{cm}^3$, denn V ist proportional zu h. Verdoppelt man nur die Höhe, bleibt die Grundfläche gleich; das Volumen wächst also mit demselben Faktor 2.
c) Würfel: $6^3 = 216\,\text{cm}^3$; Pyramide: $108\,\text{cm}^3$. Also passen $\frac{216}{108} = 2$ Pyramiden hinein. Man vergleicht die Volumina durch Division. Antwort: Der Würfel hat genau das doppelte Volumen der Pyramide aus a), es passen also rechnerisch zwei solche Pyramiden hinein (beim Umfüllen, nicht als feste Körper).

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 7 = 21\pi \approx 65{,}97\,\text{cm}^3$. Man setzt in die Formel ein: zuerst r^2, dann mal h, dann mal π und durch 3.
b) $\frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \approx 314{,}16\,\text{cm}^3$. Antwort: Der Kegel hat etwa 314,16 cm³ Volumen.
c) $r = 4$: $\frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 9 = 48\pi \approx 150{,}80\,\text{cm}^3$. Achtung: Gegeben ist der Durchmesser, der Radius ist die Hälfte, also 4 cm.
d) Der Kegel hat genau ein Drittel des Zylindervolumens $\pi r^2 h$. Man vergleicht die Formeln $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ und $\pi r^2 h$: Drei gleiche Kegel füllen den Zylinder.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Der Reihe nach: a) $V = 36\pi \approx 113{,}10\,\text{cm}^3$, $O = 36\pi \approx 113{,}10\,\text{cm}^2$. b) $V = \frac{500}{3}\pi \approx 523{,}60\,\text{cm}^3$, $O = 100\pi \approx 314{,}16\,\text{cm}^2$. c) $r = 6$: $V = 288\pi \approx 904{,}78\,\text{cm}^3$, $O = 144\pi \approx 452{,}39\,\text{cm}^2$. Man setzt den Radius in beide Formeln ein; bei Teil c) wird zuerst der Radius aus dem Durchmesser bestimmt. Bei $r = 3$ cm sind Volumen und Oberfläche zufällig zahlengleich, haben aber verschiedene Einheiten (cm³ und cm²).
b) V wird $2^3 = 8$-mal so groß, O wird $2^2 = 4$-mal so groß. Der Radius steht im Volumen in der dritten Potenz, in der Oberfläche in der zweiten. Verdoppelt man also den Radius, wird das Volumen mit $2^3 = 8$ und die Oberfläche mit $2^2 = 4$ multipliziert. Beispiel: Von $r = 3$ cm auf $r = 6$ cm wächst V von 113,10 auf 904,78 cm³.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $s = \sqrt{36 + 64} = 10$ cm. Radius, Höhe und Mantellinie bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Mantellinie als Hypotenuse.
b) $M = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi \approx 188{,}50\,\text{cm}^2$; $O = 36\pi + 60\pi = 96\pi \approx 301{,}59\,\text{cm}^2$. Für die

Oberfläche addiert man die Grundkreisfläche πr^2 und den Mantel.
c) $h = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm. Hier ist die Mantellinie die Hypotenuse und die Höhe eine Kathete; deshalb wird subtrahiert.
d) Der Mantel verdoppelt sich, denn M ist proportional zu s. Bei gleichem Radius ist $M = \pi r s$ proportional zur Mantellinie.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $h_s = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Höhe und halbe Grundkante (4 cm) sind die Katheten, h_s ist die Hypotenuse.
b) $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 80\,\text{cm}^2$. Der Mantel besteht aus vier gleichschenkligen Dreiecken mit Grundseite 8 cm und Höhe 5 cm.
c) $O = 64 + 80 = 144\,\text{cm}^2$. Oberfläche gleich Grundfläche 8^2 plus Mantel.
d) $V = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 3 = 64\,\text{cm}^3$. Antwort: Die Pyramide hat ein Volumen von 64 cm³.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Kegel: $h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 150{,}8}{16\pi} \approx 9{,}0$ cm. Kugel: $r^3 = \frac{3V}{4\pi} = \frac{3 \cdot 904{,}78}{4\pi} \approx 216$, also $r = 6$ cm. Pyramide: $h = \frac{3V}{G} = \frac{288}{36} = 8$ cm. Man stellt jeweils die Volumenformel nach der gesuchten Größe um: Man multipliziert mit 3 und teilt durch die übrigen Faktoren. Bei der Kugel muss am Ende die dritte Wurzel gezogen werden. Probe Kegel: $\frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 9 \approx 150{,}8$.
b) $r^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{300\pi}{12\pi} = 25$, also $r = 5$ cm. Man löst die Kegelformel nach r^2 auf, setzt ein und zieht die Wurzel. Dabei kürzt sich π heraus. Antwort: Der Radius beträgt 5 cm.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}25 \cdot 10 \approx 65{,}45\,\text{cm}^3$. Antwort: Die Tüte fasst etwa 65,45 cm³.
b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2{,}5^3 \approx 65{,}45\,\text{cm}^3$. Antwort: Die Eiskugel hat ebenfalls etwa 65,45 cm³.
c) Beide Volumina sind gleich groß ($65{,}45\,\text{cm}^3$). Die Tüte fasst also genau eine geschmolzene Kugel (wenn das Eis nicht mehr Platz braucht). Das ist kein Zufall: Bei $h = 4r$ gilt $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 4r = \frac{4}{3}\pi r^3$.
d) $\frac{1000}{65{,}45} \approx 15{,}3$ Kugeln, also $\approx 18{,}33$ €. Ein Liter sind 1000 cm³; man teilt durch das Volumen einer Kugel und multipliziert mit dem Preis.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2{,}4 = 7{,}20\,\text{m}^3$. Das Zelt ist eine Pyramide mit Grundfläche $3^2 = 9\,\text{m}^2$. Antwort: Der Luftraum beträgt 7,2 m³.
b) $h_s = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{8{,}01} \approx 2{,}83$ m. Halbe Grundkante 1,5 m und Höhe 2,4 m sind die Katheten.
c) $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2{,}83 \approx 16{,}98\,\text{m}^2$. Da das Zelt keinen Boden hat, braucht man nur den Mantel aus vier Dreiecken.

d) $16{,}98 \cdot 14 \approx 237{,}72$ €. Antwort: Die Plane kostet etwa 238 €.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $r = \frac{69}{2\pi} \approx 10{,}98$ cm. Man stellt die Umfangsformel nach r um.
b) $O = 4\pi r^2 \approx 1515\,\text{cm}^2$. Antwort: Für den Ball braucht man etwa 1515 cm² Leder.
c) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 5547\,\text{cm}^3 \approx 5{,}5$ l. 1 Liter sind 1000 cm³. Antwort: Der Ball fasst etwa 5,5 Liter Luft.
d) $\frac{1516}{32} \approx 47{,}4\,\text{cm}^2$. Man teilt die Oberfläche gleichmäßig auf 32 Flächen auf; in Wirklichkeit sind die Fünfecke etwas kleiner als die Sechsecke.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $V_Z = \pi \cdot 4 \cdot 6 \approx 75{,}40\,\text{m}^3$; $V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 1{,}5 \approx 6{,}28\,\text{m}^3$. Zylinder: Grundfläche mal Höhe; Kegeldach: ein Drittel davon mit der Dachhöhe.
b) $V \approx 81{,}68\,\text{m}^3$; Masse $\approx 61{,}3$ t. Das Gesamtvolumen wird mit der Dichte multipliziert. Antwort: Das Silo fasst gut 61 t Weizen.
c) $s = \sqrt{4 + 2{,}25} = 2{,}5$ m; $M_Z = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 \approx 75{,}4\,\text{m}^2$; $M_K = \pi \cdot 2 \cdot 2{,}5 \approx 15{,}7\,\text{m}^2$; zusammen $\approx 91{,}1\,\text{m}^2$. Die Mantellinie des Dachs berechnet man mit Pythagoras; Zylindermantel ist $2\pi r h$.
d) $\frac{61{,}3}{8} \approx 7{,}7$, also 8 Fahrten. Man muss aufrunden, weil sonst Weizen übrig bliebe.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $O = 4\pi \cdot 6371^2 \approx 510{,}1$ Mio. km^2. Man setzt den Erdradius in $O = 4\pi r^2$ ein.
b) $0{,}71 \cdot 510{,}1 \approx 362{,}1$ Mio. km^2. 71 % der Oberfläche sind Wasser.
c) $\left(\frac{6371}{1737}\right)^3 \approx 49{,}3$, also etwa 49 Monde. Volumina verhalten sich wie die dritte Potenz der Radien. Antwort: Etwa 49 Monde passen in die Erde.
d) $\left(\frac{1737}{6371}\right)^2 \approx 0{,}074$, also etwa $7{,}4\,\%$. Oberflächen verhalten sich wie das Quadrat der Radien.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $h_s = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$ m. Halbe Grundkante (2 m) und Dachhöhe (6 m) sind die Katheten.
b) $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6{,}32 \approx 50{,}6\,\text{m}^2$. Vier Dreiecke mit Grundseite 4 m und Höhe h_s.
c) $50{,}6 \cdot 85 \approx 4301$ €. Antwort: Das Kupferblech kostet etwa 4300 €.
d) $V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 6 = 32\,\text{m}^3$. Antwort: Der Dachraum hat 32 m³.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 9 = 48\pi \approx 150{,}8$ ml. Antwort: Das volle Glas fasst etwa 151 ml.
b) $r = 4 \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ cm; $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 \approx 44{,}7$ ml. Nach dem Strahlensatz ist der Radius proportional zur Füllhöhe.

c) $\frac{44{,}7}{150{,}8} \approx 0{,}296$ und $(\frac{2}{3})^3 = 0{,}296$. Gleich. Bei $\frac{2}{3}$ der Höhe ist das Volumen nur $(\frac{2}{3})^3$ des vollen Glases, also knapp 30 %.
d) $(\frac{h}{9})^3 \cdot 150{,}8 = 100$, $\frac{h}{9} = \sqrt[3]{0{,}663} \approx 0{,}872$, $h \approx 7{,}8$ cm. Man zieht die dritte Wurzel aus dem Volumenanteil. Antwort: Bei etwa 7,8 cm Füllhöhe sind 100 ml im Glas.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $V = 1000\,\text{cm}^3$; $O = 6 \cdot 100 = 600\,\text{cm}^2$. Würfel mit Kante 10 cm.
b) $r = 5$: $V = \frac{500}{3}\pi \approx 523{,}6\,\text{cm}^3$; $O = 100\pi \approx 314{,}2\,\text{cm}^2$. Der Kugelradius ist die halbe Kantenlänge.
c) $\frac{523{,}6}{1000} \approx 52{,}4\,\%$. Die Kugel füllt also gut die Hälfte des Würfels.
d) $\frac{314{,}2}{600} \approx 52{,}4\,\%$. Beide Anteile sind gleich, nämlich $\frac{\pi}{6}$. Volumenanteil und Oberflächenanteil sind beide $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 1{,}5 = 2\pi \approx 6{,}28\,\text{m}^3$. Der Radius ist der halbe Durchmesser, also 2 m.
b) $6{,}28 \cdot 1{,}6 \approx 10{,}05$ t. Volumen mal Dichte ergibt die Masse.
c) $\frac{10{,}05}{8} \approx 1{,}26$, also 2 Fahrten. Man muss aufrunden. Antwort: Es sind 2 Fahrten nötig.
d) $s = \sqrt{4 + 2{,}25} = 2{,}5$ m; $M = \pi \cdot 2 \cdot 2{,}5 \approx 15{,}71\,\text{m}^2$; Kosten $\approx 50{,}27$ €. Für die Abdeckung braucht man den Kegelmantel; die Mantellinie folgt aus Pythagoras.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $V = \pi \cdot 9 \cdot 4 + \frac{2}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi + 18\pi = 54\pi \approx 169{,}65\,\text{m}^3 \approx 169\,646$ l. Halbkugel: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$. 1 m³ sind 1000 Liter.
b) $\frac{169\,646}{20} \approx 8482$ s $\approx 2{,}36$ h. Man teilt das Volumen durch die Pumpleistung. Antwort: Das Füllen dauert etwa 2 Stunden 20 Minuten.
c) $M = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$; Halbkugel $2\pi \cdot 9 = 18\pi$; zusammen $42\pi \approx 131{,}95\,\text{m}^2$. Die Halbkugelfläche ist $2\pi r^2$; der Boden wird nicht mitgerechnet.
d) $\frac{131{,}95}{6} \approx 22{,}0$, also 22 Liter. Man teilt die Fläche durch die Ergiebigkeit und rundet auf.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 139 \approx 2{,}451$ Mio. m^3. Die Grundfläche ist $230^2 = 52\,900\,\text{m}^2$.
b) $2{,}451 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \approx 6{,}13$ Mio. t. Antwort: Die Pyramide wiegt etwa 6 Millionen Tonnen.
c) $h_s = \sqrt{115^2 + 139^2} \approx 180{,}4$ m; $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 230 \cdot 180{,}4 \approx 82\,986\,\text{m}^2$. Halbe Grundkante 115 m und Höhe sind die Katheten.
d) $\frac{2\,451\,000}{20 \cdot 365} \approx 336$ Blöcke pro Tag. Bei 20 Jahren Bauzeit musste man pro Tag über 300 Steinblöcke von 1 m³ setzen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 8 \approx 134{,}0$; $V_{Ku} = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 \approx 268{,}1$; $V_Z = \pi \cdot 16 \cdot 8 \approx 402{,}1$ (in cm^3). Verhältnis $134{,}0 : 268{,}1 : 402{,}1$. Die Höhe ist jeweils $2r = 8$ cm; die Volumina verhalten sich wie 1 zu 2 zu 3.
b) $V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3$, $V_{Ku} = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V_Z = 2\pi r^3$. Teilt man durch $\frac{2}{3}\pi r^3$, ergibt sich $1 : 2 : 3$. Allgemein ersetzt man h durch $2r$ und vergleicht die Faktoren vor πr^3.
c) $\Delta h = \frac{V_{Ku}}{\pi \cdot 25} = \frac{36\pi}{25\pi} = 1{,}44$ cm. Das verdrängte Wasser bildet einen Zylinder mit dem Behälterradius; man teilt das Kugelvolumen durch die Grundfläche.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $h = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} \approx 9{,}17$ cm. Die Sektorlänge s wird zur Mantellinie; Radius und Höhe sind die Katheten.
b) $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 10 = 2\pi \cdot 4$, also $\alpha = 360^\circ \cdot \frac{4}{10} = 144^\circ$. Der Bogen des Sektors wird zum Umfang des Grundkreises.
c) $M = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 40\pi \approx 125{,}66\,\mathrm{cm}^2$; $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 9{,}17 \approx 153{,}6\,\mathrm{cm}^3$. Die Mantelfläche ist die Fläche des Papiersektors.
d) $6000 : 125{,}66 \approx 47{,}7$, also höchstens 47 Trichter (praktisch deutlich weniger wegen des Verschnitts). Man teilt die Papierfläche durch die Fläche eines Trichters und rundet ab.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $a^3 = \frac{500}{3}\pi \approx 523{,}6$, $a = \sqrt[3]{523{,}6} \approx 8{,}06$ cm. Man setzt das Kugelvolumen gleich a^3 und zieht die dritte Wurzel.
b) Würfel: $6a^2 \approx 389{,}8\,\mathrm{cm}^2$; Kugel: $100\pi \approx 314{,}2\,\mathrm{cm}^2$. Die Kugel hat die kleinere Oberfläche. Bei gleichem Volumen hat die Kugel etwa 20 % weniger Oberfläche.
c) Faktor $2^3 = 8$. Für das Doppelte: $k^3 = 2$, $k = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}260$, also $26\,\%$ mehr Radius. Volumina wachsen mit k^3; umgekehrt gehört zum doppelten Volumen der Faktor $\sqrt[3]{2}$.
d) Die Kugel hat bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche. Die Oberflächenspannung der Flüssigkeit zieht die Oberfläche möglichst klein, daher entsteht eine Kugel. Deshalb sind Seifenblasen und Wassertropfen rund.