# Lernzettel - Potenzen und Potenzgesetze

Klasse: Klasse 9

Potenzen kürzen Produkte aus gleichen Faktoren ab. Mit den Potenzgesetzen rechnest du schnell und löst auch Aufgaben mit sehr großen und sehr kleinen Zahlen.

**Einstieg: Der Sprung der Zahlen**

Du legst ein Blatt Papier zur Hälfte, dann nochmal, und immer wieder. Nach einer Faltung sind es zwei Lagen, nach zwei Faltungen vier, nach drei acht. Bei jeder Faltung verdoppelt sich die Lagenzahl: $2, 4, 8, 16, \ldots$ Nach zehn Faltungen wären es schon $2^{10} = 1024$ Lagen, nach 42 Faltungen würde der Stapel theoretisch bis zum Mond reichen. Solche gewaltigen Zahlen lassen sich nur mit Potenzen kurz und übersichtlich schreiben. Auch in der Natur und Technik begegnen dir Potenzen ständig: im Speicher deines Handys, in der Entfernung zu den Sternen und im Durchmesser eines Haares. In diesem Kapitel lernst du die Potenzgesetze, mit denen du solche Zahlen geschickt berechnest und vergleichst.

## Was ist eine Potenz?

**Definition: Potenz**

Eine **Potenz** $a^n$ ist ein Produkt aus $n$ gleichen Faktoren $a$. Dabei ist $a$ die **Basis** und $n$ der **Exponent**. Beispiele: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ und $10^3 = 1000$.

**Merke: Negative Basis**

$(-3)^2 = 9$, aber $-3^2 = -9$. Bei geradem Exponenten wird das Ergebnis positiv, bei ungeradem bleibt das Vorzeichen: $(-2)^3 = -8$, $(-2)^4 = 16$.

## Exponent null und negative Exponenten

**Satz: Nullte und negative Potenzen**

Für $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Beispiele: $2^{-3} = \frac{1}{8}$, $5^{-2} = \frac{1}{25}$, $10^{-4} = 0{,}0001$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$.

**Merke: Klein, nicht negativ**

Ein negativer Exponent macht die Zahl nicht negativ, sondern klein (Kehrwert).

# Die Potenzgesetze

## Satz: Potenzgesetze

Für $a, b \neq 0$ und ganze Zahlen $m, n$ gilt:

| Gesetz | Regel | Beispiel |
|---|---|---|
| Gleiche Basis, Multiplikation | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $3^4 \cdot 3^2 = 3^6$ |
| Gleiche Basis, Division | $a^m : a^n = a^{m-n}$ | $5^7 : 5^4 = 5^3 = 125$ |
| Potenz einer Potenz | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ |
| Gleicher Exponent, Multiplikation | $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ | $2^3 \cdot 5^3 = 10^3$ |
| Gleicher Exponent, Division | $a^n : b^n = (a : b)^n$ | $6^4 : 3^4 = 2^4 = 16$ |

## Merke: Exponenten

Beim Multiplizieren gleicher Basen **addierst** du die Exponenten, beim Dividieren **subtrahierst** du sie, beim Potenzieren einer Potenz **multiplizierst** du sie. Für Summen gibt es keine Regel: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

## Hinweis

Die Gesetze folgen aus der Definition: $a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^5$, und $\frac{a^5}{a^2} = a^3$, weil du gleiche Faktoren kürzt. Setzt du in der Divisionsregel $m = n$, erhältst du $a^0 = 1$ ; mit $m = 0$ erhältst du $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

## So gehst du vor: Potenzterme vereinfachen

1. Löse Klammern und Potenzen von Potenzen auf.
2. Behandle Zahlen und jede Variable einzeln.
3. Fasse Produkte gleicher Basen zusammen (Exponenten addieren).
4. Teile am Schluss (Exponenten subtrahieren).
5. Schreibe negative Exponenten als Bruch.

## Beispiel 1: Mit Variablen rechnen

**Vereinfache $3x^2 \cdot 4x^3$, $(2a^2b)^3$ und $15x^6 : 5x^2$.**

$3x^2 \cdot 4x^3 = 12x^5$. $(2a^2b)^3 = 8a^6b^3$. $15x^6 : 5x^2 = 3x^4$.

## Beispiel 2: Negative Exponenten

**Vereinfache $x^{-2} \cdot x^5$, $\left(a^{-1}b^2\right)^2$ und $2^{-3} \cdot 2^5$.**

$x^{-2} \cdot x^5 = x^3$. $\left(a^{-1}b^2\right)^2 = a^{-2}b^4 = \frac{b^4}{a^2}$. $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^2 = 4$.

**Beispiel 3: Gesetze kombinieren**

**Vereinfache $\frac{(2x^2)^3 \cdot x^{-4}}{4x}$.**

Klammer auflösen: $(2x^2)^3 = 8x^6$. Zähler: $8x^6 \cdot x^{-4} = 8x^2$.

Teilen: $\frac{8x^2}{4x} = 2x$.

## Zehnerpotenzen und wissenschaftliche Schreibweise

**Definition: wissenschaftliche Schreibweise**

Sehr große und sehr kleine Zahlen schreibt man als $z \cdot 10^n$ mit $1 \leq z$. Beispiele: $4500 = 4{,}5 \cdot 10^3$, $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$. Zum Umrechnen schiebst du das Komma: bei großen Zahlen nach links (positiver Exponent), bei kleinen nach rechts (negativer Exponent).

**Regel: Rechnen mit Zehnerpotenzen**

$(3 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^3) = 6 \cdot 10^7$ und $(8 \cdot 10^6) : (4 \cdot 10^2) = 2 \cdot 10^4$. Ergibt sich $z \geq 10$, schiebst du weiter: $5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2 = 20 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^6$.

Vorsätze: Kilo $= 10^3$, Mega $= 10^6$, Giga $= 10^9$, Tera $= 10^{12}$; Milli $= 10^{-3}$, Mikro $= 10^{-6}$, Nano $= 10^{-9}$.

**Beispiel 4: Licht von der Sonne**

**Die Sonne ist $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m entfernt, das Licht legt $3 \cdot 10^8$ m pro Sekunde zurück. Wie lange braucht es?**

$t = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0{,}5 \cdot 10^3 = 500$ s.

Das sind etwa 8,3 Minuten.

**Beispiel 5: Potenzgleichungen**

**Löse $2^x = 64$, $3^x = \frac{1}{27}$ und $5^x = 1$.**

Schreibe beide Seiten als Potenz derselben Basis.

$64 = 2^6$, also $x = 6$. $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, also $x = -3$. $5^x = 1$ ergibt $x = 0$.

**Beispiel 6: Verdopplung**

**Eine Bakterienkultur verdoppelt sich jede Stunde. Wie viele Bakterien sind es nach 10 und nach 24 Stunden?**

Aus einem Bakterium werden $2^{10} = 1024$ und $2^{24} = 16\,777\,216$. Mehr dazu im Kapitel Wachstum und Zerfall.

**Beispiel 7: Größenordnungen**

**Ein Haar ist etwa $7 \cdot 10^{-5}$ m dick, ein Virus $10^{-7}$ m. Wie oft passt das Virus in die Haardicke?**

$\frac{7 \cdot 10^{-5}}{10^{-7}} = 7 \cdot 10^{2} = 700$. Es passen 700 Viren nebeneinander in ein Haar.

## Potenzgesetze mit Brüchen und Klammern

Die Potenzgesetze gelten auch für Brüche als Basis und für Variablen. Bei einem Bruch wird Zähler und Nenner potenziert: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$. Ein Bruch mit negativem Exponenten wird umgedreht: $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$. Achte darauf, dass ein Exponent sich nur auf das direkt davor stehende Zeichen bezieht, bei Klammern auf die ganze Klammer. So ist $2x^3$ etwas anderes als $(2x)^3 = 8x^3$.

**Beispiel 8: Bruch mit negativem Exponent**

**Berechne $(\frac{2}{3})^{-3}$.**

Du drehst den Bruch um und potenzierst: $(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} = 3{,}375$. Probe: $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$ und der Kehrwert davon ist $\frac{27}{8}$.

## Potenzen und Wurzeln

Potenzen mit Bruch-Exponenten schreiben Wurzeln als Potenzen: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ und $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$. Das passt zu den Potenzgesetzen, denn $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$, und genau das tut auch die Quadratwurzel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Mit dieser Schreibweise kannst du Wurzeln wie Potenzen behandeln, zum Beispiel $\sqrt{x^6} = x^3$.

**Beispiel 9: Wurzel als Potenz**

**Berechne $16^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{1}{3}}$ und $8^{\frac{2}{3}}$.**

$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$; $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = 2^2 = 4$.

## Vorsilben und Einheiten

Zehnerpotenzen stecken in den Vorsilben der Einheiten: Kilo ($10^3$), Mega ($10^6$), Giga ($10^9$), Tera ($10^{12}$) sowie Milli ($10^{-3}$), Mikro ($10^{-6}$) und Nano ($10^{-9}$). Beim Umrechnen verschiebst du das Komma um die Differenz der Exponenten. Ein Nanometer ist ein Milliardstel Meter: $1\,\text{nm} = 10^{-9}$ m. Die Speichergrößen in der Informatik nutzen oft Zweierpotenzen: $1$ KiB $= 2^{10} = 1024$ Byte.

**Beispiel 10: Umrechnen**

**Wie viele Millimeter sind $3{,}5$ km?**

$3{,}5\,\text{km} = 3{,}5 \cdot 10^3\,\text{m} = 3{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^3\,\text{mm} = 3{,}5 \cdot 10^6$ mm.

## Potenzen vergleichen

Willst du zwei Potenzen vergleichen, bringst du sie auf die gleiche Basis oder den gleichen Exponenten. So ist $4^{20} = (2^2)^{20} = 2^{40}$, also kleiner als $2^{50}$. Auch bei sehr großen Zahlen gibt dir die Anzahl der Stellen einen Hinweis: $10^n$ hat $n + 1$ Stellen.

## Rechnen mit großen und kleinen Zahlen

Beim Multiplizieren zweier Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise multiplizierst du die Faktoren und addierst die Exponenten. Beim Dividieren teilst du die Faktoren und subtrahierst die Exponenten. Beim Addieren und Subtrahieren musst du zuerst auf denselben Exponenten bringen. Liegt der neue Faktor nicht zwischen $1$ und $10$, verschiebst du das Komma und passt den Exponenten an.

**Beispiel 11: Multiplizieren und Dividieren**

**Berechne $(4 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-2})$ und $\frac{9 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}}$.**

Erstes Produkt: $4 \cdot 6 = 24$ und $10^{5-2} = 10^3$, also $24 \cdot 10^3 = 2{,}4 \cdot 10^4$. Quotient: $\frac{9}{3} = 3$ und $10^{3-(-4)} = 10^7$, also $3 \cdot 10^7$.

**Beispiel 12: Addieren**

**Berechne $3{,}2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$.**

Gleicher Exponent: $5 \cdot 10^3 = 0{,}5 \cdot 10^4$. Dann $(3{,}2 + 0{,}5) \cdot 10^4 = 3{,}7 \cdot 10^4 = 37\,000$.

## Typische Fehler vermeiden

Viele Fehler entstehen, weil Schüler Rechenarten verwechseln. Die Potenzgesetze gelten nur für Produkte und Quotienten, nicht für Summen: $a^2 + a^3$ lässt sich nicht zu $a^5$ zusammenfassen, und $(a + b)^2$ ist nicht $a^2 + b^2$, sondern $a^2 + 2ab + b^2$. Auch $2^3 \cdot 2^2$ ist $2^5 = 32$, nicht $4^5$: Beim Multiplizieren gleicher Basen bleibt die Basis stehen und nur die

Exponenten werden addiert.

### Beispiel 13: Fehler finden

**Ein Schüler rechnet $3^2 \cdot 3^4 = 9^6$. Was ist falsch?**

Er hat die Basen multipliziert und die Exponenten ebenfalls. Richtig: $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$. Probe: $9 \cdot 81 = 729$, aber $9^6 = 531\,441$.

### Wusstest du?

Der Schachbrett-Legende nach wünschte sich der Erfinder des Schachspiels vom König ein Reiskorn auf dem ersten Feld, zwei auf dem zweiten, vier auf dem dritten und so weiter. Der König lachte, bis seine Berater nachrechneten: $2^{64} - 1$ Körner, mehr als je auf der Erde geerntet wurden. Die Geschichte zeigt, wie schnell Potenzen wachsen.

### Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Potenz: $a^n = a \cdot a \cdots a$ mit $n$ Faktoren; $(-3)^4 = 81$, aber $-3^4 = -81$.
- $a^0 = 1$ (für $a \neq 0$) und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$: Ein negativer Exponent bildet den Kehrwert.
- Gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.
- Gleicher Exponent: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ und $a^n : b^n = (\frac{a}{b})^n$.
- Wissenschaftliche Schreibweise: $a \cdot 10^n$ mit $1 \leq a$.
- Rechnen mit Zehnerpotenzen: Faktoren multiplizieren, Exponenten addieren; beim Dividieren Exponenten subtrahieren.
- Eine Potenz mit Exponent $\frac{1}{n}$ ist eine Wurzel: $a^{1/2} = \sqrt{a}$.
- Zweierpotenzen verdoppeln sich bei jedem Schritt: Wachstum, Speicher und Faltprobleme.

### Achtung

$2^3$ ist nicht $2 \cdot 3$, sondern $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Beim Multiplizieren gleicher Basen addierst du die Exponenten, du multiplizierst sie nicht. $2^{-3}$ ist $\frac{1}{8}$, nicht $-8$. $(a+b)^2$ ist nicht $a^2 + b^2$. $3^2 \cdot 2^3$ darfst du nicht zu $6^5$ zusammenfassen: Basis und Exponent sind verschieden. Verwechsle $-3^2$ und $(-3)^2$ nicht.

### Zum Einstieg: Das Muster der Zehnerpotenzen

Schreibe untereinander: $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$. Jedes Mal, wenn der Exponent um 1 kleiner wird, teilst du durch 10. Setzt du dieses Muster fort, erhältst du $10^0 = 1$, $10^{-1} = 0{,}1$ und $10^{-2} = 0{,}01$. So erklärt sich ganz natürlich, warum $a^0 = 1$ gilt und warum ein negativer Exponent den Kehrwert bedeutet. Probiere dasselbe Muster mit der Basis 2 aus: Du gelangst zu $2^{-1} = \frac{1}{2}$ und $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

## Beispiel 14

**Ein Virus ist etwa $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ m groß, ein Sandkorn etwa $6 \cdot 10^{-4}$ m. Wie viele Viren passen nebeneinander auf die Breite eines Sandkorns?**

Wir teilen die Größe des Sandkorns durch die Größe des Virus. Dazu dividieren wir die Vorfaktoren und subtrahieren die Exponenten: $\frac{6}{1{,}2} = 5$ und $-4 - (-7) = 3$. Das Ergebnis ist $5 \cdot 10^3 = 5000$. Antwort: Etwa 5000 Viren passen nebeneinander auf die Breite eines Sandkorns.

## Häufige Fehler

Die Potenzgesetze gelten nur für Produkte und Quotienten, nicht für Summen: $2^3 + 2^4$ ist nicht $2^7$. Ebenso ist $(a+b)^2$ nicht $a^2 + b^2$. Ein negativer Exponent macht eine Zahl nicht negativ: $2^{-3}$ ist der positive Bruch $\frac{1}{8}$. Und beim Potenzieren eines Produkts muss jeder Faktor potenziert werden, also $(3x)^2 = 9x^2$ und nicht $3x^2$.

## So gehst du vor: Rechnen in wissenschaftlicher Schreibweise

1. Schreibe alle Zahlen in der Form $a \cdot 10^n$ mit $1 \leq a$.
2. Multipliziere oder dividiere zuerst die Vorfaktoren.
3. Addiere bzw. subtrahiere danach die Exponenten der Zehnerpotenzen.
4. Liegt der neue Vorfaktor nicht zwischen 1 und 10, verschiebe das Komma und passe den Exponenten an.
5. Prüfe mit einer Überschlagsrechnung, ob die Größenordnung sinnvoll ist.

## Schon gewusst?

Die Vorsilben der Maßeinheiten sind Zehnerpotenzen: kilo steht für $10^3$, mega für $10^6$, giga für $10^9$, milli für $10^{-3}$ und nano für $10^{-9}$. Ein Nanometer ist also ein Milliardstel Meter. Die Zahl $10^{100}$ heißt übrigens Googol, und nach ihr wurde eine bekannte Suchmaschine benannt.

## Ottos Tipp

Vereinfache zuerst mit den Potenzgesetzen und rechne erst dann aus. Oft kürzt sich vieles. Prüfe stichprobenweise mit kleinen Zahlen, etwa $a = 2$. Kenne die Zehnerpotenzen von $10^{-6}$ bis $10^9$ und die Vorsätze Milli, Mikro, Kilo, Mega und Giga.