Arbeitsblatt - Potenzen und Potenzgesetze

Klasse: Klasse 9 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Potenzen berechnen

Eine Potenz a^n bedeutet: a wird n-mal mit sich selbst multipliziert. Achte bei negativen Basen auf die Klammern: $(-3)^4$ und -3^4 sind verschieden.

Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
2^5		?
$(-3)^4$		?
-3^4		?
$(\frac{1}{2})^3$		?
$0{,}1^3$		?
10^6		?

a) Berechne alle Potenzen der Tabelle.
b) Erkläre den Unterschied zwischen $(-3)^4$ und -3^4.
c) Wie viele Nullen hat 10^6? Wie viele Nachkommastellen hat $0{,}1^3$?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Potenzgesetze mit gleicher Basis

Bei gleicher Basis gilt: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$ und $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Fasse zusammen und berechne den Wert.

a) $3^4 \cdot 3^2$
b) $5^7 : 5^3$
c) $(2^3)^2$
d) $2^5 \cdot 2^{-2}$
e) $(10^2)^3 : 10^4$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Gleicher Exponent

Bei gleichem Exponenten gilt: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ und $a^n : b^n = (\frac{a}{b})^n$. So lassen sich Aufgaben oft im Kopf lösen.

a) $2^3 \cdot 5^3$
b) $6^4 : 3^4$
c) $4^5 \cdot 0{,}25^5$
d) $15^2 : 5^2$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Negative Exponenten und Exponent null

Es gilt $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$. Ein negativer Exponent macht die Zahl nicht negativ, er bildet den Kehrwert.

Potenz	Bruch	Dezimalzahl
2^{-3}	?	?
10^{-2}	?	?
$(\frac{1}{3})^{-2}$	?	?
$(-2)^{-3}$	?	?
5^0	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Warum ist $a^0 = 1$? Begründe mit $a^3 : a^3$.
c) Warum darf die Basis bei a^{-n} nicht 0 sein?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Terme mit Variablen

Vereinfache die Terme so weit wie möglich. Die Variablen sind ungleich null.

a) $a^3 \cdot a^4$
b) $(x^2)^5$
c) $\frac{12x^5y^2}{4x^2y}$
d) $(2a^2b)^3$
e) $\frac{(3m)^2 \cdot m^{-1}}{m^3}$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Wissenschaftliche Schreibweise

In der wissenschaftlichen Schreibweise steht eine Zahl $a \cdot 10^n$ mit $1 \leq a$. Wandle um.

a) $4\,500\,000$
b) $0{,}00032$
c) $7{,}2 \cdot 10^3$ als Dezimalzahl
d) $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ als Dezimalzahl

e) $0{,}6 \cdot 10^5$ in wissenschaftlicher Schreibweise

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Zweierpotenzen

Zweierpotenzen kommen oft vor, zum Beispiel beim Falten und in der Informatik.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	10
2^n	?	?	?	?	?	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Wie ändert sich 2^n, wenn n um 1 wächst?
c) Berechne 2^{20} und 2^{-4}.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Das Schachbrett-Rätsel

Auf dem ersten Feld eines Schachbretts liegt 1 Reiskorn, auf jedem folgenden Feld doppelt so viele wie auf dem Feld davor.

Feld	Reiskörner
1	1
2	2
3	4
n	2^{n-1}

a) Wie viele Körner liegen auf Feld 10 und auf Feld 20?
b) Wie viele Körner liegen auf den Feldern 1 bis 10 zusammen? (Es gilt $1 + 2 + \cdots + 2^9 = 2^{10} - 1$.)
c) Wie viele Körner liegen auf Feld 64? Gib das Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise an.
d) Auf Feld 64 liegen mehr Körner als auf allen Feldern davor zusammen. Zeige das.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Speicherplatz

In der Informatik gilt 1 KiB $= 2^{10}$ Byte, 1 MiB $= 2^{10}$ KiB und 1 GiB $= 2^{10}$ MiB. Du speicherst Fotos von je 4 MiB auf einer 64-GiB-Karte.

a) Wie viele Byte hat 1 GiB? Gib sie als Zweierpotenz und als Zahl an.
b) Schreibe 4 MiB und 64 GiB als Zweierpotenz in Byte.
c) Wie viele Fotos passen auf die Karte? Rechne mit den Potenzgesetzen.
d) Die Kamera nimmt 12 Fotos pro Sekunde auf (Serienbild). Wie lange dauert es, bis die Karte voll ist (in Stunden)?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Licht von der Sonne

Das Licht legt in einer Sekunde etwa $3 \cdot 10^5$ km zurück. Die Entfernung Erde-Sonne beträgt $1{,}496 \cdot 10^8$ km, die Entfernung Erde-Mond $3{,}84 \cdot 10^5$ km.

Weg	Entfernung
Erde-Sonne	$1{,}496 \cdot 10^8$ km
Erde-Mond	$3{,}84 \cdot 10^5$ km

a) Wie lange braucht das Sonnenlicht bis zur Erde (in Sekunden und Minuten)?
b) Wie lange braucht das Mondlicht?
c) Wie oft ist die Sonne weiter entfernt als der Mond? Runde sinnvoll.
d) Ein Flugzeug fliegt mit 900 km/h. Wie lange bräuchte es zur Sonne (in Jahren)?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Bakterien

Eine Bakterie teilt sich alle 20 Minuten in zwei. Zu Beginn ist 1 Bakterie vorhanden.

Zeit	Teilungen	Anzahl
1 h	3	?
3 h	9	?
6 h	18	?
12 h	36	?

a) Ergänze die Tabelle mit Zweierpotenzen.
b) Wie viele Bakterien sind es nach 10 Stunden (Zweierpotenz, dann näherungsweise in wissenschaftlicher Schreibweise)?
c) Ein Bakterium wiegt etwa 10^{-12} g. Wie viel wiegen alle nach 12 Stunden?
d) Warum findet dieses Wachstum in der Realität nicht unbegrenzt statt?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Papier falten

Ein Blatt Papier ist $0{,}1$ mm dick. Beim Falten verdoppelt sich die Dicke jedes Mal (in der Theorie). Die Entfernung Erde-Mond beträgt etwa $3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Faltungen	Dicke
1	
7	
10	
42	

a) Berechne die Dicke nach 1, 7 und 10 Faltungen in mm und cm.

b) Wie dick wäre das Papier nach 42 Faltungen in Metern?
c) Reicht das bis zum Mond?
d) Praktisch kann man ein Blatt höchstens etwa 7-mal falten. Wie dick ist dann das Paket? Erkläre, warum es nicht weiter geht.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Download-Geschwindigkeit

Ein schnelles Netz überträgt 1 Gbit pro Sekunde (10^9 Bit/s). Ein Film hat 4 GB ($4 \cdot 10^9$ Byte). Ein Byte hat 8 Bit. Ein altes DSL-Netz schafft 16 Mbit/s ($16 \cdot 10^6$ Bit/s).

Netz	Rate
5G	10^9 Bit/s
DSL	$1{,}6 \cdot 10^7$ Bit/s

a) Wie viele Bit hat der Film?
b) Wie lange dauert der Download mit 5G?
c) Wie lange dauert er mit DSL (in Minuten)?
d) Wie oft ist das 5G-Netz schneller? Schreibe als Zehnerpotenz-Quotient.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Größenordnungen

Um sehr kleine und sehr große Längen zu vergleichen, schreibt man sie als Zehnerpotenzen.

Objekt	Länge in m
Haardicke	$7 \cdot 10^{-5}$
Ameise	$4 \cdot 10^{-3}$
Mensch	$1{,}8 \cdot 10^0$
Zugspitze (Höhe)	$2{,}96 \cdot 10^3$
Erde (Durchmesser)	$1{,}2742 \cdot 10^7$

a) Ordne die Objekte nach der Größe und gib jeweils die Zehnerpotenz (Größenordnung) an.
b) Wie oft passt eine Haardicke in den Erddurchmesser?
c) Wie viele Ameisen (hintereinander) passen auf die Zugspitzhöhe?
d) Wie viele Zehnerpotenzen liegen zwischen Haardicke und Erddurchmesser?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Das Gerücht

Am Montag um 8 Uhr erfährt eine Schülerin ein Gerücht. Jede Person, die es hört,

erzählt es in der nächsten Stunde drei Mitschülern weiter, die es noch nicht kannten. An der Schule lernen 900 Schüler.

Stunde	neu informiert	insgesamt informiert
0	1	1
1	3	4
2	9	13
3	27	40

a) Wie viele Personen sind in Stunde 4, 5 und 6 neu informiert?
b) Zeige: Nach n Stunden sind insgesamt $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ Personen informiert. Prüfe das für $n = 3$.
c) Nach wie vielen Stunden kennen mehr als 900 Schüler das Gerücht?
d) Warum ist das Modell nach einigen Stunden unrealistisch?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Sonnensystem im Modell

Die Sonne hat einen Durchmesser von $1{,}39 \cdot 10^6$ km, die Erde von $1{,}2742 \cdot 10^4$ km, und die Erde ist $1{,}496 \cdot 10^8$ km von der Sonne entfernt. Du baust ein Modell, in dem die Sonne ein Ball mit 1 m Durchmesser ist.

Größe	echt	Modell
Sonne	$1{,}39 \cdot 10^6$ km	1 m
Erde	$1{,}2742 \cdot 10^4$ km	?
Abstand	$1{,}496 \cdot 10^8$ km	?

a) Bestimme den Maßstabsfaktor.
b) Wie groß ist die Erde im Modell (in mm)?
c) Wie weit ist sie von der Sonne entfernt (in m)?
d) Der nächste Stern (Proxima Centauri) ist $4{,}0 \cdot 10^{13}$ km entfernt. Wie weit weg müsste er im Modell stehen (in km)?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Wie viel Reis auf dem Schachbrett?

Beim Schachbrett-Rätsel (2^{n-1} Körner auf Feld n) liegen insgesamt $2^{64} - 1$ Körner auf dem Brett. Ein Reiskorn wiegt etwa $0{,}025$ g. Die Weltproduktion von Reis liegt bei etwa $5 \cdot 10^8$ t pro Jahr.

a) Wie viele Körner sind es ungefähr?
b) Wie schwer ist der Reis in Gramm und in Tonnen?
c) Wie viele Jahre müsste man die gesamte Weltproduktion sammeln?
d) Ein Korn hat etwa $0{,}03\,\text{cm}^3$. Wie hoch wäre der Reisberg, wenn man den Reis auf

einer Fläche von $1\,\text{m}^2$ stapeln würde? Vergleiche mit dem Mount Everest ($8{,}8 \cdot 10^3$ m).

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Wie weit ist ein Lichtjahr?

Ein Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Das Licht fährt $3 \cdot 10^5$ km/s, ein Jahr hat etwa $3{,}156 \cdot 10^7$ s. Die Raumsonde Voyager 1 fliegt mit 17 km/s.

Größe	Wert
Lichtgeschwindigkeit	$3 \cdot 10^5$ km/s
Sekunden pro Jahr	$3{,}156 \cdot 10^7$
Proxima Centauri	$4{,}2$ Lichtjahre

a) Berechne ein Lichtjahr in km.
b) Wie weit ist Proxima Centauri in km entfernt?
c) Wie lange bräuchte Voyager dorthin (in Jahren)?
d) Wie oft schneller ist das Licht als Voyager?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Moleküle im Wassertropfen

Ein Wassertropfen wiegt etwa $0{,}05$ g. In 18 g Wasser stecken $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Auf der Erde leben etwa $8 \cdot 10^9$ Menschen.

a) Wie viele Moleküle sind in einem Tropfen?
b) Wie viele Moleküle entfallen auf jeden Menschen, wenn man den Tropfen gleichmäßig verteilt?
c) Wie viele Tropfen braucht man für 1 Liter (1000 g)?
d) Wie viele Moleküle enthält ein Liter Wasser?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Wer ist größer?

Ohne Taschenrechner lassen sich Potenzen oft mit Zehnerpotenzen vergleichen. Du weißt: $2^{10} = 1024 > 10^3$.

a) Zeige, dass $2^{100} > 10^{30}$ ist.
b) Berechne 2^{100} näherungsweise. Wie viele Stellen hat die Zahl?
c) Vergleiche 3^{20} und 2^{30}.
d) Wie groß ist $\frac{2^{50}}{4^{20}}$? Rechne mit den Potenzgesetzen.