Lösungen - Potenzen und Potenzgesetze

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$; $(-3)^4 = 81$; $-3^4 = -81$; $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $0{,}1^3 = 0{,}001$; $10^6 = 1\,000\,000$. Man schreibt jede Potenz als wiederholte Multiplikation und rechnet Schritt für Schritt. Eine gerade Anzahl negativer Faktoren ergibt ein positives Ergebnis.
b) Bei $(-3)^4$ gehört das Minus zur Basis: $(-3)(-3)(-3)(-3) = +81$. Bei -3^4 wird nur die 3 potenziert und dann das Vorzeichen gesetzt: $-(3^4) = -81$. Merke: Ohne Klammer bezieht sich der Exponent nur auf die Zahl direkt darunter, nicht auf das Vorzeichen.
c) $10^6 = 1\,000\,000$ hat sechs Nullen; $0{,}1^3 = 0{,}001$ hat drei Nachkommastellen. Bei Zehnerpotenzen gibt der Exponent die Anzahl der Nullen an, bei $0{,}1^n$ die Anzahl der Nachkommastellen.

Lösung zu Aufgabe 2

Alle Aufgaben haben die gleiche Basis, deshalb rechnet man nur mit den Exponenten: Bei der Multiplikation werden sie addiert, bei der Division subtrahiert, beim Potenzieren multipliziert.
a) $3^{4+2} = 3^6 = 729$. Kontrolle: $81 \cdot 9 = 729$.
b) $5^{7-3} = 5^4 = 625$. Kontrolle: $78\,125 : 125 = 625$.
c) $2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$. Kontrolle: $8^2 = 64$.
d) $2^{5-2} = 2^3 = 8$. Der negative Exponent wird einfach mitaddiert: $5 + (-2) = 3$.
e) $10^6 : 10^4 = 10^2 = 100$. Hier werden die Exponenten subtrahiert.

Lösung zu Aufgabe 3

Hier sind die Basen verschieden, aber die Exponenten gleich. Deshalb multipliziert bzw. dividiert man zuerst die Basen und potenziert erst danach.
a) $(2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$. So entsteht eine Zehnerpotenz, die man sofort im Kopf berechnen kann.
b) $(\frac{6}{3})^4 = 2^4 = 16$. Statt $1296 : 81$ rechnet man einfacher 2^4.
c) $(4 \cdot 0{,}25)^5 = 1^5 = 1$. Da $4 \cdot 0{,}25 = 1$ ist, ist das Ergebnis 1.
d) $(\frac{15}{5})^2 = 3^2 = 9$. Kontrolle: $225 : 25 = 9$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $(\frac{1}{3})^{-2} = 3^2 = 9$; $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$; $5^0 = 1$. Bei negativen Exponenten bildet man den Kehrwert und potenziert dann. Bei einem Bruch wird der Kehrwert einfach umgedreht: $(\frac{1}{3})^{-2} = 3^2$. Bei negativer Basis und ungeradem Exponenten bleibt das Ergebnis negativ.
b) $a^3 : a^3 = 1$, und nach dem Potenzgesetz ist $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$. Also muss $a^0 = 1$ gelten. Diese Überlegung zeigt, warum die Festlegung $a^0 = 1$ sinnvoll ist: Sie passt zu

den Potenzgesetzen.
c) Sonst müsste man durch 0 teilen: $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$ ist nicht definiert. Deshalb gilt die Regel $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ nur für $a \neq 0$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $a^{3+4} = a^7$. Gleiche Basis: Exponenten addieren.
b) $x^{2 \cdot 5} = x^{10}$. Potenz einer Potenz: Exponenten multiplizieren.
c) $\frac{12}{4} \cdot x^{5-2} \cdot y^{2-1} = 3x^3y$. Man kürzt die Zahlen und wendet für jede Variable das Gesetz $a^m : a^n = a^{m-n}$ einzeln an.
d) $2^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = 8a^6b^3$. Jeder Faktor in der Klammer wird mit 3 potenziert, auch die Zahl 2.
e) $\frac{9m^2 \cdot m^{-1}}{m^3} = \frac{9m}{m^3} = 9m^{-2} = \frac{9}{m^2}$. Zuerst wird $(3m)^2 = 9m^2$ berechnet, dann werden die Exponenten von m zusammengefasst: $2 - 1 - 3 = -2$. Ohne negativen Exponenten schreibt man den Bruch.

Lösung zu Aufgabe 6

In der wissenschaftlichen Schreibweise steht vor dem Komma genau eine Ziffer ungleich null. Der Exponent zählt, um wie viele Stellen das Komma verschoben wurde.
a) $4{,}5 \cdot 10^6$ (Komma um 6 Stellen nach links). Große Zahlen haben einen positiven Exponenten.
b) $3{,}2 \cdot 10^{-4}$ (Komma um 4 Stellen nach rechts). Kleine Zahlen unter 1 haben einen negativen Exponenten.
c) 7200. Bei 10^3 wird das Komma um drei Stellen nach rechts verschoben.
d) $0{,}015$. Bei 10^{-2} wird das Komma um zwei Stellen nach links verschoben.
e) $0{,}6 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^4$, denn der Faktor muss zwischen 1 und 10 liegen.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ und $2^{10} = 1024$. Jeder Wert entsteht aus dem vorherigen durch Verdoppeln. Den Wert $2^{10} = 1024$ sollte man sich merken.
b) Der Wert verdoppelt sich. Denn $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$. Umgekehrt halbiert sich der Wert, wenn n um 1 kleiner wird.
c) $2^{20} = 1\,048\,576$; $2^{-4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$. Man rechnet $2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2$. Ein negativer Exponent liefert den Kehrwert von $2^4 = 16$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Feld 10: $2^9 = 512$; Feld 20: $2^{19} = 524\,288$. Auf Feld n liegen 2^{n-1} Körner, weil auf Feld 1 schon $2^0 = 1$ Korn liegt.
b) $2^{10} - 1 = 1023$ Körner. Man addiert $1 + 2 + 4 + \cdots + 512$; die Summe ist immer um 1 kleiner als die nächste Zweierpotenz.
c) $2^{63} \approx 9{,}22 \cdot 10^{18}$. Auf dem letzten Feld liegen also über neun Trillionen Körner.

d) Auf den Feldern 1 bis 63 liegen $2^{63}-1$ Körner, auf Feld 64 liegen 2^{63}, das ist genau 1 Korn mehr. Das folgt aus der Summenformel aus b): Auf dem letzten Feld liegt mehr als auf allen anderen Feldern zusammen.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ Byte. Ein GiB sind $2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ Byte; die Exponenten werden addiert.
b) 4 MiB $= 2^2 \cdot 2^{20} = 2^{22}$ Byte; 64 GiB $= 2^6 \cdot 2^{30} = 2^{36}$ Byte. Man schreibt 4 und 64 als Zweierpotenzen und addiert die Exponenten.
c) $2^{36} : 2^{22} = 2^{14} = 16\,384$ Fotos. Man teilt die Kartengröße durch die Fotogröße; die Exponenten werden subtrahiert. Antwort: Es passen 16384 Fotos auf die Karte.
d) $\frac{16\,384}{12} \approx 1365$ s $\approx 0{,}38$ h. Antwort: Das Übertragen aller Fotos dauert etwa 23 Minuten.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $t = \frac{1{,}496 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} \approx 499$ s $\approx 8{,}3$ min. Zeit gleich Strecke durch Geschwindigkeit; man dividiert die Vorfaktoren und subtrahiert die Exponenten. Antwort: Das Licht braucht gut 8 Minuten.
b) $t = \frac{3{,}84 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5} = 1{,}28$ s. Antwort: Vom Mond braucht das Licht nur etwa 1,3 Sekunden.
c) $\frac{1{,}496 \cdot 10^8}{3{,}84 \cdot 10^5} \approx 390$. Antwort: Die Sonne ist etwa 390-mal so weit entfernt wie der Mond.
d) $\frac{1{,}496 \cdot 10^8}{900} \approx 166\,222$ h $\approx 19{,}0$ Jahre. Man teilt die Strecke durch die Geschwindigkeit und rechnet die Stunden in Jahre um (1 Jahr hat etwa 8760 h). Antwort: Die Reise würde etwa 19 Jahre dauern.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $2^3 = 8$; $2^9 = 512$; $2^{18} = 262\,144$; $2^{36} = 68\,719\,476\,736$. In einer Stunde gibt es drei Teilungen; nach n Teilungen gibt es 2^n Bakterien.
b) 30 Teilungen: $2^{30} \approx 1{,}07 \cdot 10^9$. 10 Stunden sind 600 Minuten, also 30 Teilungen. Antwort: über eine Milliarde Bakterien.
c) $6{,}87 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-12} = 0{,}069$ g, also $\approx 0{,}07$ g. Man multipliziert die Anzahl nach 12 Stunden mit der Masse einer Bakterie; die Exponenten werden addiert.
d) Nahrung und Platz sind begrenzt, die Bakterien stören sich gegenseitig und es entstehen Abfallstoffe. Deshalb wächst eine Bakterienkultur in Wirklichkeit nur am Anfang exponentiell.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2$ mm; $0{,}1 \cdot 2^7 = 12{,}8$ mm $= 1{,}28$ cm; $0{,}1 \cdot 2^{10} = 102{,}4$ mm $\approx 10{,}2$ cm. Die Dicke ist $0{,}1 \cdot 2^n$ mm, denn jede Faltung verdoppelt sie.
b) $10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot 2^{42} \approx 4{,}40 \cdot 10^8$ m ($0{,}1$ mm $= 10^{-4}$ m). Man rechnet zuerst in Meter um und

multipliziert dann mit $2^{42} \approx 4{,}4 \cdot 10^{12}$.
c) $4{,}40 \cdot 10^8 > 3{,}84 \cdot 10^8$: Ja, die Dicke wäre größer als der Abstand zum Mond. Man vergleicht die Vorfaktoren bei gleicher Zehnerpotenz.
d) $0{,}1 \cdot 2^7 = 12{,}8$ mm. Danach reichen weder die Kraft noch das Material; die Länge des Papiers müsste exponentiell wachsen, damit man biegen kann. In der Praxis schafft man deshalb nur etwa sieben Faltungen.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $4 \cdot 10^9 \cdot 8 = 32 \cdot 10^9 = 3{,}2 \cdot 10^{10}$ Bit. Man rechnet Byte in Bit um, indem man mit 8 multipliziert.
b) $\frac{3{,}2 \cdot 10^{10}}{10^9} = 32$ s. Antwort: Mit dem schnellen Netz dauert der Download 32 Sekunden.
c) $\frac{3{,}2 \cdot 10^{10}}{1{,}6 \cdot 10^7} = 2000$ s $\approx 33{,}3$ min. Man teilt durch die kleinere Datenrate. Antwort: etwa 33 Minuten.
d) $\frac{10^9}{1{,}6 \cdot 10^7} \approx 62{,}5$-mal schneller. Man vergleicht die Datenraten durch Division.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Haar (10^{-5}) < Ameise (10^{-3}) < Mensch (10^0) < Zugspitze (10^3) < Erde (10^7). Man vergleicht zuerst die Exponenten: Der größere Exponent bedeutet die größere Länge.
b) $\frac{1{,}2742 \cdot 10^7}{7 \cdot 10^{-5}} \approx 1{,}82 \cdot 10^{11}$. Man dividiert die Vorfaktoren und subtrahiert die Exponenten: $7 - (-5) = 12$. Antwort: Der Erddurchmesser ist etwa 182 Milliarden Mal so groß wie ein Haar.
c) $\frac{2{,}96 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 7{,}40 \cdot 10^5$, also $740\,000$ Ameisen. Antwort: Etwa 740000 Ameisen hintereinander wären so hoch wie die Zugspitze.
d) Von 10^{-5} bis 10^7 sind es $7 - (-5) = 12$ Größenordnungen. Jede Größenordnung bedeutet den Faktor 10.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Stunde 4: $3^4 = 81$; Stunde 5: $3^5 = 243$; Stunde 6: $3^6 = 729$. In jeder Stunde verdreifacht sich die Zahl der neu Informierten, deshalb erhält man Dreierpotenzen.
b) Summe $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$ (geometrische Summe). Für $n = 3$: $\frac{3^4 - 1}{2} = \frac{80}{2} = 40$; passt zur Tabelle. Die Formel für die Summe lautet $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$; für $n = 3$ stimmt sie mit der Tabelle überein.
c) $n = 5$: $\frac{3^6 - 1}{2} = 364$ (zu wenig); $n = 6$: $\frac{3^7 - 1}{2} = 1093$ (mehr als 900). Nach 6 Stunden. Man setzt nacheinander Werte für n ein, bis die Summe 900 übersteigt.
d) Jeder Schüler kann nur einmal informiert werden, und viele Mitschüler kennen das Gerücht schon. Die Annahme »drei neue« gilt daher nicht mehr. Das Modell beschreibt nur den Anfang gut.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Faktor $= \frac{1\,\text{m}}{1{,}39 \cdot 10^9\,\text{m}} \approx 7{,}19 \cdot 10^{-10}$. Der Maßstab ist das Verhältnis der Modellgröße zur Originalgröße; vorher rechnet man km in m um.
b) $1{,}2742 \cdot 10^7\,\text{m} \cdot 7{,}19 \cdot 10^{-10} \approx 9{,}2$ mm. Antwort: Die Erde wäre im Modell nur etwa 9 mm groß, so groß wie eine Erbse.
c) $1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} \cdot 7{,}19 \cdot 10^{-10} \approx 107{,}6$ m. Antwort: Die Erdkugel müsste etwa 108 m vom Sonnenball entfernt liegen.
d) $4{,}0 \cdot 10^{16}\,\text{m} \cdot 7{,}19 \cdot 10^{-10} \approx 28\,776\,978$ m $\approx 28\,777$ km. Selbst im Modell wäre der nächste Stern also fast 29000 km weit weg.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $2^{64} \approx 1{,}845 \cdot 10^{19}$. Man rechnet $2^{64} = (2^{10})^6 \cdot 2^4$ oder mit dem Taschenrechner.
b) $1{,}845 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}025\,\text{g} \approx 4{,}61 \cdot 10^{17}$ g $= 4{,}61 \cdot 10^{11}$ t. Man multipliziert die Anzahl mit der Masse pro Korn; 1 t sind 10^6 g.
c) $\frac{4{,}61 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^8} \approx 922$ Jahre. Antwort: Die Weltproduktion von über 900 Jahren würde nicht reichen.
d) Volumen $\approx 1{,}845 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}03\,\text{cm}^3 = 5{,}53 \cdot 10^{17}\,\text{cm}^3 = 5{,}53 \cdot 10^{11}\,\text{m}^3$. Geteilt durch $1\,\text{m}^2$ ergibt eine Höhe von $5{,}5 \cdot 10^{11}$ m, also viel höher als der Everest ($8{,}8 \cdot 10^3$ m). Diese Rechnung zeigt eindrucksvoll, wie schnell exponentielles Wachstum ist.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $3 \cdot 10^5 \cdot 3{,}156 \cdot 10^7 = 9{,}47 \cdot 10^{12}$ km. Strecke gleich Geschwindigkeit mal Zeit; Vorfaktoren multiplizieren, Exponenten addieren. Antwort: Ein Lichtjahr sind etwa 9,5 Billionen km.
b) $4{,}2 \cdot 9{,}47 \cdot 10^{12} \approx 3{,}98 \cdot 10^{13}$ km. Antwort: Der nächste Stern ist etwa 40 Billionen km entfernt.
c) $\frac{3{,}98 \cdot 10^{13}}{17} \approx 2{,}3 \cdot 10^{12}$ s; durch $3{,}156 \cdot 10^7$ ergibt etwa $74\,118$ Jahre. Man teilt die Strecke durch die Geschwindigkeit und rechnet Sekunden in Jahre um. Antwort: Voyager bräuchte über 74000 Jahre.
d) $\frac{3 \cdot 10^5}{17} \approx 17\,647$. Antwort: Das Licht ist etwa 17600-mal so schnell wie die Raumsonde.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $\frac{0{,}05}{18} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 1{,}67 \cdot 10^{21}$. Ein Tropfen ist der Bruchteil $\frac{0{,}05}{18}$ von 18 g; mit diesem Anteil multipliziert man die Molekülzahl.
b) $\frac{1{,}67 \cdot 10^{21}}{8 \cdot 10^9} \approx 2{,}09 \cdot 10^{11}$ Moleküle pro Mensch. Antwort: Auf jeden Menschen kämen etwa 200 Milliarden Moleküle aus einem einzigen Tropfen.
c) $\frac{1000}{0{,}05} = 20\,000 = 2 \cdot 10^4$ Tropfen. 1 Liter Wasser wiegt etwa 1000 g. Antwort: 20000 Tropfen.

d) $\frac{1000}{18} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \approx 3{,}35 \cdot 10^{25}$. Man rechnet mit 1000 g statt 0,05 g.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30}$. Man schreibt 2^{100} als Potenz von 2^{10} und vergleicht die Basen 1024 und 1000.
b) $2^{100} \approx 1{,}268 \cdot 10^{30}$, also 31 Stellen. Eine Zahl der Form $a \cdot 10^{30}$ mit $1 \leq a$ hat 31 Stellen.
c) $3^{20} = 3\,486\,784\,401$; $2^{30} = 1\,073\,741\,824$. Also $3^{20} > 2^{30}$ (etwa $3{,}2$-mal so groß). Man vergleicht die exakten Werte.
d) $4^{20} = (2^2)^{20} = 2^{40}$, also $\frac{2^{50}}{2^{40}} = 2^{10} = 1024$. Man schreibt 4 als 2^2, damit beide Potenzen dieselbe Basis haben, und subtrahiert die Exponenten.