Lösungen zur Klassenarbeit - Ähnlichkeit und Strahlensätze

Klasse: Klasse 9 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Bei einer zentrischen Streckung mit Zentrum im Ursprung wird jede Koordinate mit $k = 1{,}5$ multipliziert. Aus $A(2|4)$ wird $A'(1{,}5 \cdot 2|1{,}5 \cdot 4) = A'(3|6)$, aus $B(6|2)$ wird $B'(9|3)$ (je 1 P.).
b) Der Abstand zweier Punkte folgt aus dem Satz des Pythagoras mit den Koordinatendifferenzen $\Delta x = 4$ und $\Delta y = -2$: $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ (1 P.). Für die Bildstrecke gilt $A'B' = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$ (1 P.). Kontrolle: $6{,}71 : 4{,}47 \approx 1{,}5$, genau der Streckfaktor. Antwort: $AB \approx 4{,}47$ LE und $A'B' \approx 6{,}71$ LE.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Nach dem ersten Strahlensatz verhalten sich die Abschnitte auf beiden Strahlen gleich: $\frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZA'}{ZA}$. Einsetzen ergibt $\frac{ZB'}{7{,}5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$, also $ZB' = 7{,}5 \cdot 1{,}6 = 12$ cm (2 P.: 1 P. für den Ansatz, 1 P. für das Ergebnis).
b) Der zweite Strahlensatz verbindet die Parallelstrecken mit den Scheitelabschnitten: $\frac{ZA'}{ZA} = \frac{A'B'}{AB}$. Mit $\frac{10}{4} = 2{,}5$ folgt $ZA' = 6 \cdot 2{,}5 = 15$ cm (2 P.). Wichtig: Beim zweiten Strahlensatz müssen die Strecken immer vom Scheitel Z aus gemessen werden, nicht der Abschnitt AA'. Antwort: $ZB' = 12$ cm und $ZA' = 15$ cm.

Lösung zu Aufgabe 3 (3 BE/Punkte)

a) Der Maßstab $1 : 200$ bedeutet: 1 cm auf dem Plan entspricht 200 cm in Wirklichkeit. Also ist die Wand $5{,}6 \cdot 200 = 1120$ cm lang; durch 100 geteilt ergibt das $11{,}2$ m (1 P.).
b) Bei Flächen wird nicht mit 200, sondern mit $200^2 = 40\,000$ multipliziert, weil beide Seiten eines Rechtecks gestreckt werden. Man erhält $40 \cdot 40\,000 = 1\,600\,000\,\text{cm}^2$ (1 P.). Da $1\,\text{m}^2 = 10\,000\,\text{cm}^2$ gilt, sind das $160\,\text{m}^2$ (1 P.). Typischer Fehler: nur mit 200 multiplizieren, das ergäbe falsche $0{,}8\,\text{m}^2$. Antwort: Wand $11{,}2$ m, Grundstück $160\,\text{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Sonnenstrahlen fallen parallel ein, daher sind die Dreiecke aus Stab und Schatten sowie Mast und Schatten ähnlich. Es gilt $\frac{h}{12} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$, also $h = 12 \cdot 0{,}75 = 9$ m (2 P.).
b) Am nächsten Tag ist das Verhältnis Schatten zu Höhe wieder für beide gleich: $\frac{s}{2} = \frac{14}{12}$. Damit wird $s = 2 \cdot \frac{14}{12} \approx 2{,}33$ m (2 P.).
c) Die Modellhöhe beträgt $900\,\text{cm} : 30 = 30$ cm. Die Fahne misst $100\,\text{cm} \cdot 150\,\text{cm} = 15\,000\,\text{cm}^2$; Flächen verkleinern sich mit $30^2 = 900$, also

$15\,000 : 900 \approx 16{,}7\,\text{cm}^2$ (1 P.). Antwort: Mast 9 m, Stabschatten etwa $2{,}33$ m, Modell 30 cm hoch mit rund $16{,}7\,\text{cm}^2$ Fahne.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Der Streckfaktor ist das Verhältnis entsprechender Längen, hier der Kanten: $k = \frac{6}{4} = 1{,}5$ (1 P.).
b) Ein Würfel hat sechs gleiche Quadrate als Oberfläche, also $O = 6a^2$, und das Volumen $V = a^3$. Kleiner Würfel: $O_1 = 6 \cdot 16 = 96\,\text{cm}^2$, $V_1 = 4^3 = 64\,\text{cm}^3$. Großer Würfel: $O_2 = 6 \cdot 36 = 216\,\text{cm}^2$, $V_2 = 6^3 = 216\,\text{cm}^3$ (2 P.).
c) Das Flächenverhältnis ist $216 : 96 = 2{,}25$ und stimmt mit $k^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ überein. Das Volumenverhältnis ist $216 : 64 = 3{,}375 = 1{,}5^3 = k^3$ (1 P.). Damit ist bestätigt: Längen wachsen mit k, Flächen mit k^2, Rauminhalte mit k^3. Zufällig haben O_2 und V_2 dieselbe Maßzahl, aber verschiedene Einheiten.