Lernzettel - Ähnlichkeit und Strahlensätze

Klasse: Klasse 9

Ähnliche Figuren haben dieselbe Form, aber nicht dieselbe Größe. Mit der zentrischen Streckung und den Strahlensätzen berechnest du Längen, die du nicht direkt messen kannst.

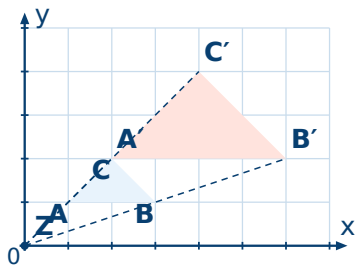
Einstieg: Wie hoch ist der Turm?

Die Klasse 9b steht vor dem Kirchturm ihrer Stadt. Wie hoch ist er? Hinaufklettern und messen geht nicht. Aber Mia ist $1{,}60$ m groß und wirft einen Schatten von 2 m. Der Turm wirft zur selben Zeit einen Schatten von 50 m. Weil die Sonnenstrahlen parallel sind, haben der Mensch und der Turm mit ihren Schatten dieselbe Form, nur eine andere Größe. Dann gilt: Turmhöhe zu Schatten verhält sich wie Körpergröße zu Schatten, also $h = 50 \cdot \frac{1{,}6}{2} = 40$ m. Dieser Gedanke, dass zwei Figuren dieselbe Form haben und sich nur in der Größe unterscheiden, ist der Kern des Kapitels. Du lernst, ihn mit der zentrischen Streckung, der Ähnlichkeit und den Strahlensätzen genau zu fassen und für Karten, Modelle und Messungen zu nutzen.

Zentrische Streckung

Definition: zentrische Streckung

Bei einer **zentrischen Streckung** wählt man einen Punkt Z, das **Streckzentrum**, und eine Zahl $k > 0$, den **Streckfaktor**. Jeder Punkt P wird auf einen Bildpunkt P' auf dem Strahl ZP abgebildet mit . Bei $k > 1$ wird die Figur vergrößert, bei 0 verkleinert, bei $k = 1$ bleibt sie gleich.



Hinweis

Liegt Z im Ursprung, erhältst du die Bildpunkte durch Multiplikation der Koordinaten mit k: $P(x|y) \mapsto P'(kx|ky)$. Für $k = 2$ gilt $A(1|2) \mapsto A'(2|4)$.

Satz: Eigenschaften der Streckung

- Alle Winkel bleiben gleich groß.
- Alle Längen werden mit k multipliziert.
- Eine Gerade wird auf eine dazu **parallele** Gerade abgebildet.
- Flächeninhalte werden mit k^2 multipliziert.
- Volumen werden mit k^3 multipliziert.

Beispiel 1: Fläche und Volumen

Ein Rechteck 3 cm × 4 cm wird mit $k = 3$ gestreckt. Ein Würfel mit 8 cm³ wird mit $k = 2$ gestreckt.

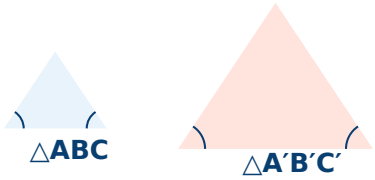
Das Rechteck hat 12 cm². Das Bild hat $9 \cdot 12 = 108$ cm² $= 12 \cdot 3^2$.

Der Würfel hat danach $8 \cdot 2^3 = 64$ cm³.

Ähnliche Figuren und Dreiecke

Definition: ähnlich

Zwei Figuren heißen **ähnlich**, wenn die eine durch eine zentrische Streckung (und eventuell Verschieben, Drehen, Spiegeln) aus der anderen entsteht. Entsprechende Winkel sind gleich, entsprechende Seiten stehen im gleichen Verhältnis k.



Satz: Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

- in zwei Winkeln (**WW**),
- in allen drei Seitenverhältnissen (**SSS**),
- im Verhältnis zweier Seiten und im eingeschlossenen Winkel (**SWS**),
- im Verhältnis zweier Seiten und im Winkel gegenüber der längeren Seite (**SsW**).

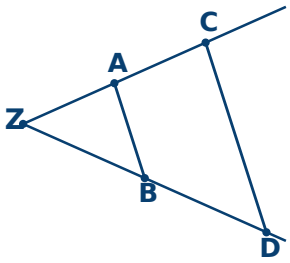
Beispiel 2: Ähnlich oder nicht?

Sind die Dreiecke $3; 4; 5$ und $6; 8; 10$ ähnlich? Und $3; 4; 5$ und $6; 8; 11$?

$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$: ähnlich mit $k = 2$.

$\frac{11}{5} \neq 2$: nicht ähnlich.

Die Strahlensätze



Satz: 1. Strahlensatz

Zwei Strahlen beginnen in Z. Zwei parallele Geraden schneiden sie in A, B (näher an Z) und C, D. Dann gilt



(Verhältnisse auf den Strahlen).

Satz: 2. Strahlensatz



(Verhältnisse mit den Parallelen).

Merke: Merkhilfe

Der 2. Strahlensatz enthält die Parallelstücke AB und CD. Die Strahlensätze gelten ebenso für sich schneidende Geraden (X-Figur) mit Z in der Mitte.

Satz: Umkehrung des 1. Strahlensatzes

Gilt , dann sind AB und CD parallel.

Beispiel 3: Parallel?

Es ist $ZA = 4$, $ZC = 6$, $ZB = 10$, $ZD = 15$. Sind AB und CD parallel? Und bei $ZB = 9$, $ZD = 12$?

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Die Geraden sind parallel.

$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} \neq \frac{2}{3}$. Nicht parallel.

So gehst du vor: Strahlensatz anwenden

1. Male die Figur groß und färbe die beiden Dreiecke mit Z ein.
2. Prüfe, dass die Geraden parallel sind.
3. Schreibe das Verhältnis zweier Strecken als Bruch und setze es gleich zum Verhältnis der entsprechenden Strecken.
4. Löse nach der gesuchten Strecke auf.
5. Prüfe: Die größere Figur muss die längeren Strecken haben.

Beispiel 4: Fehlende Strecke

Gegeben sind $ZA = 4$ cm, $ZC = 10$ cm, $ZB = 6$ cm und $AB = 5$ cm. Berechne ZD und CD.

1. Strahlensatz: $\frac{4}{10} = \frac{6}{ZD}$, also $ZD = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15$ cm.

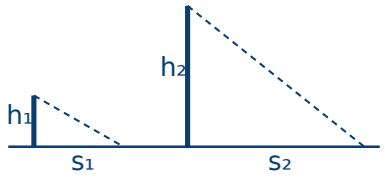
2. Strahlensatz: $\frac{5}{CD} = \frac{4}{10}$, also $CD = 12{,}5$ cm.

Beispiel 5: Höhe über den Schatten

Ein Stab von 1,5 m wirft einen Schatten von 2 m. Ein Baum wirft zur gleichen Zeit 12 m Schatten. Wie hoch ist der Baum?

Die Sonnenstrahlen sind parallel, die Dreiecke sind ähnlich.

$\frac{h}{12} = \frac{1{,}5}{2}$, also $h = 9$ m.



Beispiel 6: Flussbreite

Z ist ein Baum am anderen Ufer. Diesseits misst man $AB = 10$ m und 12 m weiter eine parallele Strecke $CD = 15$ m. Wie breit ist der Fluss?

Die Breite $x = ZA$ folgt aus dem 2. Strahlensatz: $\frac{x}{x+12} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

$3x = 2x + 24$, also $x = 24$ m.

Maßstab und Modelle

Hinweis

Ein Maßstab $1 : 25\,000$ ist ein Streckfaktor $k = \frac{1}{25\,000}$. Vier Zentimeter auf der Karte

sind $4 \cdot 25\,000\,\text{cm} = 1\,\text{km}$ in der Wirklichkeit. Bei Flächen auf Karten und Modellen musst du das Quadrat des Maßstabs beachten.

Streckung im Koordinatensystem

Liegt das Streckzentrum im Ursprung, ist die Streckung besonders einfach: Du multiplizierst beide Koordinaten mit k. Ein Punkt $P(x|y)$ wird zu $P'(kx|ky)$. Bei k liegt das Bild auf der anderen Seite des Zentrums und die Figur steht auf dem Kopf. Das Bild einer Strecke ist immer parallel zur Originalstrecke. Daran erkennst du eine Streckung auch im Gitter: Verbindest du Original- und Bildpunkt, laufen alle Geraden durch Z.

Beispiel 7: Dreieck strecken

Strecke das Dreieck $A(1|1)$, $B(4|1)$, $C(1|3)$ vom Ursprung aus mit $k = 2$.

$A'(2|2)$, $B'(8|2)$, $C'(2|6)$. Die Grundseite wird von 3 auf 6 und die Höhe von 2 auf 4. Die Fläche wächst von 3 auf 12, also mit $k^2 = 4$.

Ähnlichkeit erkennen und nutzen

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen (WW), in allen drei Seitenverhältnissen (SSS) oder in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten (SWS). In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel gleich und entsprechende Strecken im gleichen Verhältnis. Entscheidend ist die richtige Zuordnung: Die kürzeste Seite gehört zur kürzesten, die längste zur längsten.

Beispiel 8: Fehlende Seite

Zwei ähnliche Dreiecke: Das kleine hat die Seiten 4, 6, 9 cm, das große hat die kürzeste Seite 10 cm. Wie lang sind die anderen beiden?

$k = \frac{10}{4} = 2{,}5$. Die anderen Seiten sind $6 \cdot 2{,}5 = 15$ cm und $9 \cdot 2{,}5 = 22{,}5$ cm. Probe: Das Verhältnis $\frac{15}{22{,}5} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ stimmt.

V-Figur und X-Figur

Die Strahlensätze gelten in zwei Formen. Bei der V-Figur liegen beide Parallelen auf derselben Seite von Z, bei der X-Figur auf entgegengesetzten Seiten. Die Gleichungen sind gleich aufgebaut: Alle Strecken, die bei Z beginnen, stehen im gleichen Verhältnis, und die Parallelstücke stehen im gleichen Verhältnis wie die Strecken von Z aus. Wichtig: Beim 1. Strahlensatz kannst du nur Strecken auf den Strahlen vergleichen, beim 2. Strahlensatz brauchst du ein Stück zwischen den Parallelen.

Beispiel 9: X-Figur

Zwei Geraden schneiden sich in Z. Es ist $ZA = 3$ cm, $ZB = 4$ cm, $ZA' = 9$ cm und $AB \parallel A'B'$ (auf der anderen Seite von Z). Wie lang ist ZB'?

$\frac{ZB'}{ZB} = \frac{ZA'}{ZA} = \frac{9}{3} = 3$, also $ZB' = 4 \cdot 3 = 12$ cm. Auch in der X-Figur gelten die gleichen Verhältnisse.

Flächen und Volumen bei Ähnlichkeit

Aus k folgt sofort das Flächenverhältnis k^2 und das Volumenverhältnis k^3. Das erklärt viele Alltagsfragen: Ein doppelt so hoher Eimer ist nicht doppelt, sondern achtmal so voll. Eine 30-cm-Pizza ist nicht anderthalbmal, sondern $2{,}25$-mal so groß wie eine 20-cm-Pizza.

Beispiel 10: Farbbedarf

Eine Wand von $12\,\mathrm{m}^2$ braucht 2 l Farbe. Wie viel Farbe braucht eine ähnliche, aber $1{,}5$-fach vergrößerte Wand?

Die Fläche wächst mit $k^2 = 2{,}25$: $12 \cdot 2{,}25 = 27\,\mathrm{m}^2$. Farbe: $2 \cdot 2{,}25 = 4{,}5$ l.

Wusstest du?

Der griechische Gelehrte Thales von Milet soll vor über 2500 Jahren die Höhe der Cheops-Pyramide gemessen haben. Er wartete, bis sein eigener Schatten so lang war wie er selbst, und maß dann den Schatten der Pyramide. Auch Kartografen, Architekten und Fotografen nutzen die Ähnlichkeit jeden Tag.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Faktor k: Jede Strecke wird mit k multipliziert, Winkel bleiben gleich.
- Im Koordinatensystem mit $Z(0|0)$: $P(x|y) \to P'(kx|ky)$.
- Längen wachsen mit k, Flächen mit k^2, Volumina mit k^3.
- Ähnliche Figuren stimmen in allen Winkeln überein; bei Dreiecken reichen zwei Winkel oder gleiche Seitenverhältnisse.
- 1. Strahlensatz: $\frac{ZA}{ZA'} = \frac{ZB}{ZB'}$; 2. Strahlensatz: $\frac{ZA}{ZA'} = \frac{AB}{A'B'}$ (nur bei parallelen Geraden).
- Umkehrung: Stimmen die Verhältnisse auf den Strahlen, sind die Geraden AB und $A'B'$ parallel.
- Maßstab $1 : n$: Längen mal n, Flächen mal n^2, Volumina mal n^3.
- Anwendungen: Schatten, Flussbreite, Höhenmessung, Karten, Modelle und Kopierer.

Achtung

Verdrehe die Verhältnisse nicht: Zähler und Nenner müssen jeweils zum gleichen Strahl und zur gleichen Geraden passen. Miss vom Punkt Z aus, nicht nur den Abschnitt AC. Rechne Flächen mit k^2 um, nicht mit k. Verwende die Strahlensätze nur bei parallelen Geraden.

Zum Einstieg: Der Daumensprung

Strecke den Arm aus, halte den Daumen hoch und schließe abwechselnd das linke und das rechte Auge. Der Daumen scheint vor dem Hintergrund zu springen. Weil der Abstand der Augen und die Armlänge ein Dreieck bilden, das dem Dreieck aus Sprungweite und Entfernung ähnlich ist, kann man mit diesem Trick Entfernungen schätzen. Die Armlänge ist etwa zehnmal so groß wie der Augenabstand. Springt der Daumen also um 30 m, ist der Gegenstand ungefähr 300 m entfernt.

Beispiel 11

Ein Tisch wird von einer Lampe beleuchtet, die 2 m über dem Boden hängt. Der Tisch ist 0,8 m hoch und 1 m breit. Wie breit ist sein Schatten auf dem Boden, wenn die Lampe genau über der Tischmitte hängt?

Die Lichtstrahlen gehen von der Lampe aus und bilden zwei Strahlen, die durch die Tischkanten laufen. Tischplatte und Schatten sind parallel. Die Lampe ist 1,2 m über dem Tisch und 2 m über dem Boden. Nach dem zweiten Strahlensatz gilt $\frac{s}{1} = \frac{2}{1{,}2}$, also $s \approx 1{,}67$ m. Antwort: Der Schatten ist ungefähr 1,67 m breit.

Häufige Fehler

Beim zweiten Strahlensatz müssen die Abschnitte immer vom Scheitel Z aus gemessen werden, nicht zwischen den Parallelen. Außerdem gelten die Strahlensätze nur, wenn die Geraden wirklich parallel sind. Achte darauf, dass Flächen nicht mit k, sondern mit k^2 wachsen.

Ottos Tipp

Male die Figur groß und färbe die beiden Dreiecke mit Z ein. Schreibe das Verhältnis zweier Strecken als Bruch und setze es gleich zum Verhältnis der entsprechenden Strecken. Typische Anwendungen sind Schattenlängen, Flussbreiten, Landkarten und Modelle.