# Arbeitsblatt - Ähnlichkeit und Strahlensätze

Klasse: Klasse 9 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

## Aufgabe 1

### Aufgabe 1 – Den Streckfaktor bestimmen

Bei einer zentrischen Streckung wird jede Strecke mit demselben Faktor $k$ multipliziert. Du bestimmst $k$, indem du die Bildlänge durch die Originallänge teilst.

| Original | Bild | $k$ |
|---|---|---|
| 2 cm | 5 cm | ? |
| 6 cm | 4,5 cm | ? |
| 8 cm | 2 cm | ? |
| 3,2 cm | 4,8 cm | ? |

a) Ergänze die Tabelle.
b) Welche Streckungen sind Vergrößerungen, welche Verkleinerungen?
c) Wie lang ist das Bild einer $10$ cm langen Strecke bei jedem dieser Faktoren?

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 – Bildpunkte im Koordinatensystem

Das Streckzentrum ist der Ursprung $Z(0|0)$. Ein Punkt $P(x|y)$ wird auf $P'(kx|ky)$ abgebildet. Das Dreieck $ABC$ hat die Ecken $A(1|2)$, $B(3|1)$ und $C(2|4)$.

a) Bestimme die Bildpunkte bei $k = 2$.
b) Bestimme die Bildpunkte der Punkte $P(4|6)$, $Q(8|2)$, $R(2|10)$ bei $k = 0{,}5$.
c) Berechne den Flächeninhalt von $ABC$ und seines Bilds bei $k = 2$. Wie hängen die Flächen zusammen?

## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 – Länge, Fläche, Volumen

Bei der Streckung mit dem Faktor $k$ werden Längen mit $k$, Flächen mit $k^2$ und Volumina mit $k^3$ multipliziert. Ein Rechteck misst $2$ cm $\times$ $5$ cm, ein Würfel hat die Kantenlänge $2$ cm. Beide werden mit $k = 3$ gestreckt.

a) Gib die Seitenlängen und den Umfang des Bildrechtecks an.
b) Berechne die Fläche von Rechteck und Bild und vergleiche.
c) Berechne Volumen und Oberfläche von Würfel und Bildwürfel.

## Aufgabe 4

### Aufgabe 4 – Ähnliche Dreiecke?

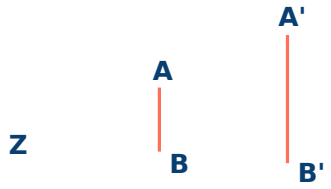
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen oder wenn ihre Seiten im gleichen Verhältnis stehen. Prüfe, ob die Dreiecke ähnlich sind.

a) Dreieck 1: $3$ cm, $4$ cm, $5$ cm; Dreieck 2: $9$ cm, $12$ cm, $15$ cm
b) Dreieck 1: $4$ cm, $6$ cm, $8$ cm; Dreieck 2: $6$ cm, $9$ cm, $13$ cm
c) Dreieck 1: Winkel $40^\circ$ und $75^\circ$; Dreieck 2: Winkel $75^\circ$ und $65^\circ$
d) Sind alle gleichseitigen Dreiecke ähnlich? Begründe.

## Aufgabe 5

### Aufgabe 5 – Strahlensatz: Strecken berechnen

Zwei Geraden schneiden sich in $Z$. Zwei Parallelen schneiden sie in $A, B$ und $A', B'$. Es gilt $\frac{ZA}{ZA'} = \frac{ZB}{ZB'}$ und $\frac{ZA}{ZA'} = \frac{AB}{A'B'}$.




a) $ZA = 4$ cm, $AA' = 2$ cm, $ZB = 5$ cm. Berechne $ZB'$ und $BB'$.
b) $ZA = 6$ cm, $ZA' = 9$ cm, $A'B' = 12$ cm. Berechne $AB$.
c) $ZB = 10$ cm, $ZB' = 14$ cm, $ZA = 15$ cm. Berechne $ZA'$.
d) $AB = 3{,}6$ cm, $A'B' = 9$ cm, $ZA' = 12{,}5$ cm. Berechne $ZA$.

## Aufgabe 6

### Aufgabe 6 – Maßstab auf Karte und Plan

Ein Maßstab $1 : n$ bedeutet: $1$ cm auf der Karte sind $n$ cm in der Wirklichkeit. Flächen ändern sich mit $n^2$.

a) Karte $1 : 25\,000$: Zwei Orte sind $4{,}8$ cm voneinander entfernt. Wie weit sind sie in Wirklichkeit?
b) Ein Wanderweg ist $3{,}5$ km lang. Wie lang ist er auf der Karte $1 : 25\,000$?
c) Auf einer Karte $1 : 50\,000$ misst der Weg zum Gipfel $7$ cm. Wie lang ist er in Wirklichkeit?
d) Ein See ist auf der Karte $1 : 25\,000$ $2\,\text{cm}^2$ groß. Wie groß ist er in Wirklichkeit in Hektar? ($1$ ha $= 10\,000\,\text{m}^2$)

## Aufgabe 7

### Aufgabe 7 – Am Kopierer

Ein Kopierer kann in Prozent vergrößern und verkleinern. Ein DIN-A4-Blatt misst $21{,}0$ cm $\times$ $29{,}7$ cm.

a) Das Blatt wird auf $141\,\%$ vergrößert. Welche Maße hat die Kopie?
b) Das Blatt wird auf $71\,\%$ verkleinert. Welche Maße hat die Kopie?
c) Zweimal hintereinander auf $71\,\%$ verkleinern: Welcher Gesamtfaktor entsteht? Wie verändert sich die Fläche?
d) Warum sind gerade $141\,\%$ und $71\,\%$ sinnvolle Faktoren? (Tipp: $\sqrt{2}$)

## Aufgabe 8

### Aufgabe 8 – Die Höhe des Baums

Lena ist $1{,}80$ m groß und wirft $2{,}40$ m Schatten. Zur gleichen Zeit wirft eine Eiche $14$ m Schatten, der Kirchturm $38$ m. Die Sonnenstrahlen sind parallel.

a) Wie hoch ist die Eiche?
b) Wie hoch ist der Kirchturm?
c) Später misst Lenas Schatten $3{,}60$ m, der Eichenschatten $21$ m. Passt das zur Höhe aus a)?
d) Erkläre in einem Satz, warum die Dreiecke ähnlich sind.

## Aufgabe 9

### Aufgabe 9 – Die Modelleisenbahn

Bei der Spurgröße H0 gilt der Maßstab $1:87$. Eine echte Lokomotive ist $19{,}2$ m lang und $4{,}3$ m hoch, die Spurweite beträgt $1{,}435$ m.

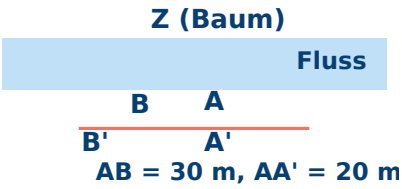
| Größe | echt | Modell |
|---|---|---|
| Länge | 19,2 m | ? |
| Höhe | 4,3 m | ? |
| Spurweite | 1,435 m | ? |

a) Ergänze die Modellmaße in Zentimetern.
b) Ein Bahnhof ist in Wirklichkeit $120$ m lang. Welche Länge hat er auf der Platte?
c) Ein Güterwagen fasst $80\,\mathrm{m}^3$. Welches Volumen hat der Modellwagen in $\mathrm{cm}^3$?
d) Das Modell wiegt $0{,}25$ kg. Wie schwer wäre die echte Lok, wenn sie aus dem gleichen Stoff wäre (in Tonnen)?

## Aufgabe 10

### Aufgabe 10 – Wie breit ist der Fluss?

Anna will die Breite eines Flusses bestimmen, ohne ihn zu überqueren. Ein Baum $Z$ steht am anderen Ufer. Anna steht bei $A$ direkt gegenüber, geht $30$ m am Ufer entlang bis $B$ und visiert den Baum an. Dann geht sie von $A$ $20$ m vom Fluss weg bis $A'$ und läuft parallel zum Ufer, bis sie auf der Sichtlinie $ZB$ steht (Punkt $B'$). Die Zeichnung ist nicht maßstäblich.




a) Anna misst $A'B' = 50$ m. Wie breit ist der Fluss?
b) Ein anderes Mal misst sie $A'B' = 45$ m. Wie breit ist der Fluss dann?
c) Schreibe die Strahlensatz-Gleichung auf, die du benutzt hast.
d) Warum muss die Strecke $A'B'$ parallel zum Ufer liegen?

## Aufgabe 11

### Aufgabe 11 – Zwei Pizzen im Vergleich

Die Pizzeria «Da Mario» verkauft zwei Größen mit gleichem Belag und gleich dicker Schicht.

| Größe | Durchmesser | Preis |
|---|---|---|
| klein | 20 cm | 6,00 € |
| groß | 30 cm | 11,00 € |

a) Berechne die Flächen beider Pizzen.
b) In welchem Verhältnis stehen die Flächen? Welchen Faktor hat der Durchmesser?
c) Berechne den Preis pro $100\,\text{cm}^2$.
d) Welche Pizza ist günstiger? Wie viel würde die große bei gleichem Quadratzentimeterpreis kosten?

## Aufgabe 12

### Aufgabe 12 – Das Foto vergrößern

Ein Foto misst $9$ cm $\times$ $13$ cm. Eine Druckerei bietet Vergrößerungen zum Preis von $0{,}12$ € pro $100\,\text{cm}^2$ an.

a) Das Foto soll $27$ cm breit werden. Wie hoch wird es? Welcher Faktor wird benutzt?
b) Wie verändert sich die Fläche?
c) Was kostet dieses Foto?
d) Ein Foto $13$ cm $\times$ $18$ cm soll auf A4 ($21$ cm $\times$ $29{,}7$ cm) vergrößert werden. Welcher Faktor passt zur Breite, und wie groß ist dann der weiße Rand oben und unten zusammen?

## Aufgabe 13

### Aufgabe 13 – Der Beamer im Klassenzimmer

Ein Beamer erzeugt ein Bild, dessen Breite proportional zum Abstand von der Wand wächst. Bei $2$ m Abstand ist das Bild $1{,}2$ m breit. Das Seitenverhältnis ist $16:9$.

a) Wie breit ist das Bild bei $3{,}5$ m Abstand?
b) Wie hoch ist es dann?
c) Die Tafelwand ist $2{,}4$ m breit. Bei welchem Abstand füllt das Bild sie genau aus?
d) Wie groß ist die Bildfläche bei $3{,}5$ m im Vergleich zu $2$ m?

## Aufgabe 14

### Aufgabe 14 – Die Baumhöhe mit dem Försterdreieck

Ein Förster will die Höhe einer Fichte bestimmen. Er hält einen Stab $30$ cm lang senkrecht in $60$ cm Abstand vor sein Auge (Augenhöhe $1{,}65$ m) und peilt über den oberen Stabrand die Baumspitze an. Er steht dabei $24$ m vom Stamm entfernt.

a) Welcher Faktor gehört zu $60$ cm $\to$ $24$ m?
b) Wie hoch ragt der Baum über Augenhöhe?
c) Wie hoch ist der Baum insgesamt?
d) Wie hoch wäre er bei $18$ m Abstand?

## Aufgabe 15

### Aufgabe 15 – Der Trichter

Ein Trichter hat die Form eines Kegels mit der Höhe $12$ cm und dem Radius $6$ cm (Spitze unten). Das Volumen eines Kegels ist $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Der Trichter wird mit Wasser gefüllt.

| Füllhöhe | Radius der Wasseroberfläche |
|---|---|
| 6 cm | ? |
| 9 cm | ? |
| 12 cm | 6 cm |

a) Ergänze die Radien mit dem Strahlensatz.
b) Berechne das Volumen bei voller Füllung.
c) Berechne das Volumen bei halber Füllhöhe und bei $9$ cm. Welcher Bruchteil ist das jeweils?
d) Bei welcher Füllhöhe ist der Trichter halb voll (nach Volumen)?

## Aufgabe 16

### Aufgabe 16 – Der Grundriss einer Wohnung

Der Plan einer Wohnung hat den Maßstab $1 : 50$.

| Raum | Plan | Wirklichkeit |
|---|---|---|
| Wohnzimmer | 12 cm × 8 cm | ? |
| Küche | 6 cm × 8 cm | ? |
| Flur | 14 cm × 2 cm | ? |

a) Ergänze die wirklichen Maße in Metern.

b) Berechne jeweils die wirkliche Fläche in $\mathrm{m}^2$.
c) Das Wohnzimmer bekommt Parkett für $38$ € pro $\mathrm{m}^2$, mit $10\,\%$ Verschnitt. Wie hoch sind die Kosten?
d) Auf dem Plan hat das Wohnzimmer $96\,\mathrm{cm}^2$. Zeige, dass man die wirkliche Fläche auch mit $50^2$ berechnen kann.

## Aufgabe 17

### Aufgabe 17 – Parallel oder nicht? Der Dachstuhl

Im Dachstuhl soll ein Querbalken parallel zum Boden liegen. Gemessen wird von der Spitze $Z$ aus an den beiden Sparren.

| Sparren | bis Balken | bis Boden |
|---|---|---|
| links | 2,4 m | 6,0 m |
| rechts | 3,2 m | 8,0 m |

a) Prüfe mit der Umkehrung des Strahlensatzes, ob der Balken parallel zum Boden liegt.
b) Der Boden (Spannweite) ist $10$ m lang. Wie lang ist der Balken?
c) Rechts wird der Balken stattdessen bei $3{,}0$ m angebracht. Ist er dann noch parallel?
d) Wie hoch (senkrecht) liegt der Balken über dem Boden, wenn das Dach $4$ m hoch ist?

## Aufgabe 18

### Aufgabe 18 – Die Lochkamera

Eine Lochkamera bildet Gegenstände auf dem Kopf stehend ab. Zwischen Loch und Film liegen $8$ cm. Ein Baum ist $6$ m hoch und steht $20$ m vom Loch entfernt.

a) Wie hoch ist das Bild auf dem Film?
b) Wie hoch wäre es bei $30$ m Abstand?
c) Auf dem Film ist ein Haus $3$ cm hoch zu sehen. Es steht $40$ m entfernt. Wie hoch ist es wirklich?
d) Warum steht das Bild auf dem Kopf? Nenne die beiden ähnlichen Dreiecke.

## Aufgabe 19

### Aufgabe 19 – Das Modellschiff

Ein Frachtschiff ist $120$ m lang, hat $2400\,\mathrm{m}^2$ Segelfläche für die Windantriebe und verdrängt $8000$ t Wasser (also $8000\,\mathrm{m}^3$). Ein Modellbauer baut es im Maßstab $1:100$.

| Größe | Original | Modell |
|---|---|---|
| Länge | 120 m | ? |
| Segelfläche | 2400 $\mathrm{m}^2$ | ? |
| Verdrängung | 8000 t | ? |

a) Berechne die Modelllänge.
b) Berechne die Modell-Segelfläche in $\mathrm{m}^2$ und $\mathrm{cm}^2$.
c) Berechne die Verdrängung des Modells in kg und in Litern.
d) Das Modell wird in einem Becken getestet. Es ist $1{,}2$ m lang. Wie schnell (in cm/s) fährt es, wenn das Original $20$ km/h fährt? Bei Schiffsmodellen skaliert die Geschwindigkeit mit $\sqrt{k} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$.

## Aufgabe 20

**Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Die Parallele im Dreieck**

In einem Dreieck $ABC$ mit der Grundseite $AB = 20$ cm und der Höhe $h = 9$ cm wird eine Parallele zu $AB$ gezogen. Sie schneidet die Seiten $AC$ und $BC$ und schneidet von der Spitze $C$ ein kleines Dreieck ab.

a) Berechne die Fläche des Dreiecks $ABC$.
b) Die Parallele liegt $3$ cm unter der Spitze $C$. Berechne die Fläche des Teildreiecks und des Trapezes darunter.
c) Wie weit unter $C$ muss die Parallele liegen, damit das Teildreieck genau die halbe Fläche hat?
d) Das Trapez soll $57{,}6\,\mathrm{cm}^2$ groß sein. Wie lang ist die Parallele, und wie weit liegt sie unter $C$?