Lösungen - Ähnlichkeit und Strahlensätze

Klasse: Klasse 9

Lösung zu Aufgabe 1

a) $k_1 = \frac{5}{2} = 2{,}50$; $k_2 = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$; $k_3 = \frac{2}{8} = 0{,}25$; $k_4 = \frac{4{,}8}{3{,}2} = 1{,}50$. Jeder Streckfaktor ist der Quotient Bildlänge durch Originallänge.
b) Vergrößerung bei $k > 1$: Fälle 1 und 4. Verkleinerung bei 0: Fälle 2 und 3. Ist k größer als 1, wird die Figur größer; liegt k zwischen 0 und 1, wird sie kleiner.
c) $10 \cdot 2{,}5 = 25$ cm; $10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$ cm; $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ cm; $10 \cdot 1{,}5 = 15$ cm. Eine 10 cm lange Strecke wird jeweils mit dem Streckfaktor multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $A'(2|4)$, $B'(6|2)$, $C'(4|8)$. Bei der Streckung am Ursprung werden beide Koordinaten mit $k = 2$ multipliziert.
b) $P'(2|3)$, $Q'(4|1)$, $R'(1|5)$. Hier werden die Koordinaten mit dem angegebenen Faktor multipliziert; jede Bildkoordinate ist das k-Fache der Originalkoordinate.
c) Mit der Gaußschen Flächenformel:
$A_{ABC} = \frac{1}{2}|1(1-4) + 3(4-2) + 2(2-1)| = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ FE,
$A_{A'B'C'} = \frac{1}{2}|2(2-8) + 6(8-4) + 4(4-2)| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ FE. Das Bild hat die 4-fache Fläche, denn $k^2 = 4$. Die Seiten werden verdoppelt, die Fläche wird deshalb vervierfacht.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Seiten 6 cm und 15 cm; Umfang $2 \cdot (6 + 15) = 42$ cm (Original 14 cm, also $\cdot 3$). Jede Seite wird mit $k = 3$ multipliziert; deshalb wächst auch der Umfang mit dem Faktor 3.
b) $A = 10\,\text{cm}^2$, $A' = 6 \cdot 15 = 90\,\text{cm}^2$; $90 : 10 = 9 = 3^2$. Die Fläche wächst mit k^2, weil zwei Längen miteinander multipliziert werden.
c) Original: $V = 8\,\text{cm}^3$, $O = 6 \cdot 4 = 24\,\text{cm}^2$. Bild: Kante 6 cm, $V' = 216\,\text{cm}^3 = 27 \cdot 8$, $O' = 6 \cdot 36 = 216\,\text{cm}^2 = 9 \cdot 24$. Das Volumen wächst mit $k^3 = 27$, die Oberfläche mit $k^2 = 9$. Antwort: Der große Würfel hat 216 cm³ Volumen und 216 cm² Oberfläche.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3$: ähnlich mit dem Faktor 3. Alle drei Seitenverhältnisse sind gleich, deshalb sind die Dreiecke ähnlich.
b) $\frac{6}{4} = 1{,}5$, $\frac{9}{6} = 1{,}5$, aber $\frac{13}{8} = 1{,}625$: nicht ähnlich. Ein einziges abweichendes Verhältnis genügt, damit die Dreiecke nicht ähnlich sind.
c) Dreieck 1 hat den dritten Winkel $180^\circ - 40^\circ - 75^\circ = 65^\circ$, also die Winkel $40^\circ, 75^\circ, 65^\circ$. Dreieck 2 hat den dritten Winkel $180^\circ - 75^\circ - 65^\circ = 40^\circ$. Beide stimmen in allen Winkeln überein, sind also ähnlich (WW-Satz). Für den Winkelvergleich ergänzt man zuerst den dritten Winkel mit der Winkelsumme 180°.

d) Ja: Alle Winkel sind 60°. Zwei gleichseitige Dreiecke stimmen in allen Winkeln überein. Gleichseitige Dreiecke sind deshalb immer ähnlich, egal wie groß sie sind.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $ZA' = 4 + 2 = 6$; $\frac{ZB'}{5} = \frac{6}{4}$, also $ZB' = 7{,}5$ cm und $BB' = 7{,}5 - 5 = 2{,}5$ cm. Man ergänzt zuerst ZA' und wendet dann den ersten Strahlensatz an. Antwort: $BB' = 2{,}5$ cm.
b) $\frac{AB}{12} = \frac{6}{9}$, also $AB = \frac{12 \cdot 6}{9} = 8$ cm. Nach dem zweiten Strahlensatz verhalten sich die Parallelstrecken wie die Abschnitte vom Scheitel. Antwort: $AB = 8$ cm.
c) $\frac{15}{ZA'} = \frac{10}{14}$, also $ZA' = \frac{15 \cdot 14}{10} = 21$ cm. Man stellt die Verhältnisgleichung auf und löst durch Multiplikation über Kreuz.
d) $\frac{ZA}{12{,}5} = \frac{3{,}6}{9}$, also $ZA = \frac{12{,}5 \cdot 3{,}6}{9} = 5{,}0$ cm. Auch hier hilft das Auflösen über Kreuz; die gesuchte Strecke steht im Zähler.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $4{,}8 \cdot 25\,000 = 120\,000$ cm $= 1{,}2$ km. Man multipliziert die Kartenstrecke mit 25000 und rechnet cm in km um (100000 cm = 1 km).
b) $350\,000$ cm : $25\,000 = 14$ cm. Rückwärts teilt man die wirkliche Länge (in cm) durch 25000.
c) $7 \cdot 50\,000 = 350\,000$ cm $= 3{,}5$ km. Antwort: Die Strecke ist in Wirklichkeit 3,5 km lang.
d) $2 \cdot 25\,000^2 = 1\,250\,000\,000\,\text{cm}^2 = 125\,000\,\text{m}^2 = 12{,}5$ ha. Flächen werden mit dem Quadrat der Maßstabszahl multipliziert; 1 ha sind $10\,000\,\text{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $21{,}0 \cdot 1{,}41 \approx 29{,}6$ cm; $29{,}7 \cdot 1{,}41 \approx 41{,}9$ cm (fast A3: $29{,}7 \times 42{,}0$). 141 % bedeutet den Faktor 1,41 für jede Seite.
b) $21{,}0 \cdot 0{,}71 \approx 14{,}9$ cm; $29{,}7 \cdot 0{,}71 \approx 21{,}1$ cm (fast A5). 71 % bedeutet den Faktor 0,71 für jede Seite.
c) $0{,}71^2 \approx 0{,}50$, also etwa $50\,\%$; die Fläche wird mit $0{,}71^4 \approx 0{,}25$ multipliziert, also gut ein Viertel. Die Fläche ändert sich mit dem Quadrat des Faktors; zweimal verkleinern bedeutet $0{,}71^2$ für die Seiten.
d) Beim DIN-Format halbiert ein Falz die Fläche; die Seiten verhalten sich wie $1 : \sqrt{2}$. Der Faktor $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ verdoppelt die Fläche, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ halbiert sie. Deshalb ist auf Kopierern genau 141 % für A4 auf A3 und 71 % für A4 auf A5 eingestellt.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $\frac{h}{14} = \frac{1{,}8}{2{,}4}$, also $h = 14 \cdot 0{,}75 = 10{,}5$ m. Lena und ihr Schatten bilden ein Dreieck, das zum Dreieck aus Eiche und Schatten ähnlich ist; das Verhältnis Höhe zu Schatten ist $0{,}75$. Antwort: Die Eiche ist 10,5 m hoch.
b) $h = 38 \cdot 0{,}75 = 28{,}5$ m. Antwort: Der Kirchturm ist 28,5 m hoch.

c) Faktor $\frac{1{,}8}{3{,}6} = 0{,}5$; $21 \cdot 0{,}5 = 10{,}5$ m. Ja, das passt. Das Ergebnis stimmt mit dem aus a) überein, die Messung ist also bestätigt.
d) Beide Dreiecke haben einen rechten Winkel und denselben Sonnenwinkel, stimmen also in zwei Winkeln überein. Damit sind die Dreiecke nach dem WW-Satz ähnlich, und ihre Seiten stehen im gleichen Verhältnis.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $1920 : 87 \approx 22{,}1$ cm; $430 : 87 \approx 4{,}9$ cm; $143{,}5 : 87 \approx 1{,}65$ cm (genau $16{,}5$ mm). Jede echte Länge wird in cm umgerechnet und durch 87 geteilt.
b) $12\,000 : 87 \approx 138$ cm $\approx 1{,}38$ m. Antwort: Der Modellzug ist etwa 1,38 m lang.
c) $80\,000\,000\,\text{cm}^3 : 87^3 \approx 121\,\text{cm}^3$. Volumina werden mit 87^3 verkleinert.
d) $0{,}25 \cdot 87^3 \approx 164\,626$ kg ≈ 165 t. Umgekehrt wird die Masse des Modells mit 87^3 multipliziert, falls das Material gleich wäre.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\frac{w+20}{w} = \frac{50}{30}$, also $30w + 600 = 50w$, $w = 30$ m. Probe: $\frac{50}{30} = \frac{30+20}{30}$. Die beiden Dreiecke mit Spitze am Baum sind ähnlich. Man multipliziert über Kreuz und löst die lineare Gleichung. Antwort: Der Fluss ist 30 m breit.
b) $\frac{w+20}{w} = \frac{45}{30}$, also $30w + 600 = 45w$, $w = 40$ m. Antwort: Bei dieser Messung ergibt sich eine Breite von 40 m.
c) 2. Strahlensatz: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{ZA}{ZA'}$, mit $ZA = w$ und $ZA' = w + 20$. Die Parallelstrecken sind die beiden Strecken am Ufer, die Abschnitte vom Scheitel sind w und $w + 20$.
d) Nur bei parallelen Geraden gelten die Strahlensätze, sonst sind die Dreiecke nicht ähnlich. Anna muss deshalb genau senkrecht zum Ufer gehen.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $A_k = \pi \cdot 10^2 \approx 314\,\text{cm}^2$; $A_g = \pi \cdot 15^2 \approx 707\,\text{cm}^2$. Man berechnet die Kreisflächen mit $A = \pi r^2$, der Radius ist der halbe Durchmesser.
b) Durchmesserfaktor $k = 1{,}5$, Flächenverhältnis $k^2 = 2{,}25$ ($707 : 314 \approx 2{,}25$). Die Flächen verhalten sich wie das Quadrat des Längenverhältnisses.
c) klein: $\frac{6}{3{,}14} \approx 1{,}91$ €; groß: $\frac{11}{7{,}07} \approx 1{,}56$ €. Man teilt den Preis durch die Fläche in 100 cm². Antwort: Die kleine kostet etwa 1,91 €, die große etwa 1,56 € pro 100 cm².
d) Die große Pizza ist günstiger. Bei gleichem Preis pro Fläche würde sie $6 \cdot 2{,}25 = 13{,}50$ € kosten. Obwohl der Durchmesser nur um die Hälfte größer ist, bekommt man mehr als doppelt so viel Pizza.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $k = \frac{27}{9} = 3$, Höhe $13 \cdot 3 = 39$ cm. Bei einer Vergrößerung ohne Verzerrung wird die Höhe mit demselben Faktor multipliziert wie die Breite.
b) Fläche vorher $117\,\text{cm}^2$, nachher $27 \cdot 39 = 1053\,\text{cm}^2$; $1053 : 117 = 9 = 3^2$. Die Fläche wächst mit $k^2 = 9$.

c) $10{,}53 \cdot 0{,}12 \approx 1{,}26$ €. Man rechnet die Fläche in Einheiten von 100 cm² um. Antwort: Der Druck kostet etwa 1,26 €.
d) $k = \frac{21}{13} \approx 1{,}615$; Höhe $18 \cdot 1{,}615 \approx 29{,}1$ cm; Rand $29{,}7 - 29{,}1 = 0{,}6$ cm. Man wählt den Faktor so, dass die längere Seite genau auf das Papier passt, und berechnet die andere Seite.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\frac{b}{3{,}5} = \frac{1{,}2}{2}$, also $b = 2{,}10$ m. Breite und Abstand sind proportional. Antwort: Bei 3,5 m Abstand ist das Bild 2,10 m breit.
b) $h = 2{,}1 \cdot \frac{9}{16} \approx 1{,}18$ m. Die Höhe ist $\frac{9}{16}$ der Breite. Antwort: etwa 1,18 m.
c) $\frac{2{,}4}{1{,}2} = 2$, also Abstand $2 \cdot 2 = 4$ m. Die doppelte Breite verlangt den doppelten Abstand. Antwort: 4 m.
d) Faktor $1{,}75$, Fläche $1{,}75^2 = 3{,}06$-mal so groß. Der Abstand wächst um den Faktor $3{,}5 : 2 = 1{,}75$, die Bildfläche um das Quadrat davon.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\frac{2400}{60} = 40$. Das kleine Dreieck (Auge, Stab) und das große Dreieck (Auge, Baum) sind ähnlich; der Streckfaktor ist das Verhältnis der Abstände (24 m = 2400 cm).
b) $30 \cdot 40 = 1200$ cm $= 12$ m. Die Stablänge wird mit dem Faktor multipliziert. Die Spitze liegt 12 m über Augenhöhe.
c) $12 + 1{,}65 = 13{,}65$ m. Die Augenhöhe muss addiert werden. Antwort: Die Fichte ist etwa 13,65 m hoch.
d) $\frac{1800}{60} = 30$, $30 \cdot 30 = 900$ cm, also $9 + 1{,}65 = 10{,}65$ m. Antwort: Bei 18 m Abstand ergibt sich eine Baumhöhe von 10,65 m.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Radius $= \frac{h}{2}$: 3 cm bei 6 cm, 4,5 cm bei 9 cm. Nach dem Strahlensatz verhält sich der Radius zur Höhe wie $6 : 12$.
b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 12 = 144\pi \approx 452{,}4\,\text{cm}^3$. Antwort: Der volle Trichter fasst etwa 452 cm³.
c) $V_6 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 6 = 18\pi \approx 56{,}5\,\text{cm}^3$, das ist $\frac{1}{8}$ ($k = \frac{1}{2}$, $k^3 = \frac{1}{8}$).
$V_9 = \frac{1}{3}\pi \cdot 20{,}25 \cdot 9 \approx 190{,}9\,\text{cm}^3$, das sind $(\frac{3}{4})^3 = 0{,}422 \approx 42\,\%$. Bei halber Füllhöhe ist nur ein Achtel gefüllt, weil Volumina mit k^3 wachsen.
d) $k^3 = 0{,}5$, $k = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}794$; Füllhöhe $\approx 12 \cdot 0{,}794 \approx 9{,}5$ cm. Für das halbe Volumen muss $k^3 = 0{,}5$ gelten; man zieht die dritte Wurzel. Antwort: bei etwa 9,5 cm Füllhöhe.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Wohnzimmer 6 m × 4 m; Küche 3 m × 4 m; Flur 7 m × 1 m (je Plan-cm mal 0,5 m). Beim Maßstab 1:50 entspricht 1 cm auf dem Plan 50 cm, also 0,5 m.
b) Wohnzimmer $24\,\text{m}^2$; Küche $12\,\text{m}^2$; Flur $7\,\text{m}^2$; zusammen $43\,\text{m}^2$. Die Flächen berechnet man aus den wirklichen Maßen.
c) $24 \cdot 1{,}1 = 26{,}4\,\text{m}^2$; $26{,}4 \cdot 38 = 1003{,}20$ €. Man rechnet 10 % Verschnitt dazu und

multipliziert mit dem Preis pro m². Antwort: Der Boden kostet 1003,20 €.
d) $96 \cdot 2500 = 240\,000\,\text{cm}^2 = 24\,\text{m}^2$; passt zu $24\,\text{m}^2$. Die Planfläche wird mit $50^2 = 2500$ multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{2{,}4}{6} = 0{,}40$ und $\frac{3{,}2}{8} = 0{,}40$ sind gleich: parallel. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes sind die Geraden parallel, wenn die Verhältnisse der Abschnitte übereinstimmen.
b) $AB = 10 \cdot 0{,}4 = 4$ m. Der Balken ist nach dem zweiten Strahlensatz das 0,4-Fache der Bodenbreite.
c) $\frac{3}{8} = 0{,}375 \neq 0{,}4$: nicht mehr parallel. Die Verhältnisse unterscheiden sich, der Balken liegt also schief.
d) Die Spitze liegt $4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6$ m über dem Balken, also liegt der Balken $4 - 1{,}6 = 2{,}4$ m über dem Boden. Man rechnet die Höhe der Spitze über dem Balken mit dem Faktor 0,4 aus und subtrahiert sie von der Gesamthöhe.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $\frac{b}{600} = \frac{8}{2000}$, also $b = 2{,}4$ cm. Man rechnet alles in cm und stellt das Verhältnis auf. Antwort: Das Bild ist 2,4 cm hoch.
b) $b = 600 \cdot \frac{8}{3000} = 1{,}6$ cm. Bei größerer Entfernung wird das Bild kleiner.
c) $\frac{H}{3} = \frac{4000}{8}$, also $H = 1500$ cm $= 15$ m. Man stellt die Verhältnisgleichung um und löst nach der Gegenstandshöhe auf. Antwort: Der Gegenstand ist 15 m hoch.
d) Die Lichtstrahlen kreuzen sich im Loch. Die Dreiecke Gegenstand-Loch und Loch-Bild haben gleiche Winkel am Loch (Scheitelwinkel) und parallele Grundseiten, sind also ähnlich. Deshalb gelten die Strahlensätze auch in der Lochkamera.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $120 : 100 = 1{,}2$ m. Längen werden durch 100 geteilt.
b) $2400 : 100^2 = 0{,}24\,\text{m}^2 = 2400\,\text{cm}^2$. Flächen werden durch $100^2 = 10\,000$ geteilt.
c) $8000\,\text{m}^3 : 100^3 = 0{,}008\,\text{m}^3 = 8$ l, also 8 kg. Volumina werden durch 100^3 geteilt. Antwort: Das Modell verdrängt 8 Liter, also 8 kg Wasser.
d) $20 \cdot 0{,}1 = 2$ km/h $= \frac{2000 \cdot 100}{3600}\,\text{cm/s} \approx 56$ cm/s. Man rechnet km/h in cm/s um.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9 = 90\,\text{cm}^2$. Antwort: Das Dreieck hat eine Fläche von 90 cm².
b) $k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; Teildreieck: $90 \cdot \frac{1}{9} = 10\,\text{cm}^2$; Trapez: $90 - 10 = 80\,\text{cm}^2$. Der Streckfaktor ist das Verhältnis der Höhen, die Fläche wächst mit k^2.
c) $k^2 = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$, Abstand $\approx 9 \cdot 0{,}707 \approx 6{,}36$ cm unter C. Halbe Fläche bedeutet $k^2 = \frac{1}{2}$; man zieht die Wurzel.
d) Teildreieck $= 90 - 57{,}6 = 32{,}4\,\text{cm}^2$, $k^2 = \frac{32{,}4}{90} = 0{,}36$, $k = 0{,}6$. Länge $20 \cdot 0{,}6 = 12$ cm, Abstand $9 \cdot 0{,}6 = 5{,}4$ cm. Man bestimmt zuerst k^2 aus dem Flächenverhältnis und

zieht dann die Wurzel.