Lernzettel - Satz des Pythagoras

Klasse: Klasse 8

Der Satz des Pythagoras verbindet die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Du berechnest damit fehlende Längen in Figuren und Körpern.

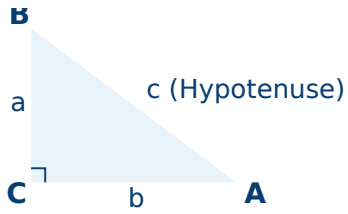
Einstieg: Die Leiter an der Wand

Herr Schulz will die Dachrinne reinigen. Seine Leiter ist 5 m lang, und er stellt sie $1{,}4$ m von der Hauswand entfernt auf. Wie hoch reicht sie? Du kannst die Leiter nicht einfach messen, aber du kennst zwei Größen eines rechtwinkligen Dreiecks: die Leiter ist die längste Seite, der Abstand zur Wand die kurze. Der Satz des Pythagoras liefert die dritte: $h = \sqrt{5^2 - 1{,}4^2} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ m. Schon die Ägypter nutzten dieses Wissen beim Bau der Pyramiden: Mit einer Schnur mit zwölf Knoten legten sie ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 und erhielten einen rechten Winkel. In diesem Kapitel lernst du, Seiten zu berechnen, rechte Winkel zu prüfen und den Satz in Alltag und Raumgeometrie anzuwenden.

Das rechtwinklige Dreieck

Definition: Katheten und Hypotenuse

In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten am rechten Winkel **Katheten** (a und b). Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt **Hypotenuse** (c).

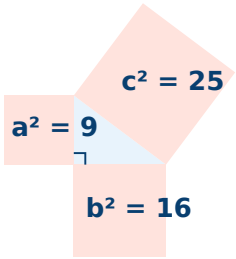


\n

Merke: Längste Seite

Die Hypotenuse ist immer die längste Seite.

Der Satz des Pythagoras



\n

Satz: Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hinweis

Anschaulich: Zeichnest du an jede Seite ein Quadrat, haben die beiden kleinen Quadrate zusammen genau den Flächeninhalt des großen Quadrats.

Eine Seite berechnen

Regel: Seiten berechnen

- Hypotenuse gesucht: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (addieren).
- Kathete gesucht: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ (subtrahieren).

Beispiel 1: Hypotenuse

Berechne c für $a = 3$ cm und $b = 4$ cm.

$c = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ cm.

Beispiel 2: Kathete

Berechne a für $c = 13$ cm und $b = 5$ cm.

$a = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm. Hier wird subtrahiert, weil die Hypotenuse das große Quadrat liefert.

Beispiel 3: Nicht glatt

Berechne c für $a = 4$ und $b = 5$.

$c = \sqrt{41} \approx 6{,}40$. Runde sinnvoll und gib die Einheit an.

Definition: Pythagoreisches Zahlentripel

Dreiecke, deren drei Seiten ganze Zahlen sind, heißen pythagoreisch. Bekannte Tripel sind $(3|4|5)$, $(5|12|13)$, $(8|15|17)$ und $(20|21|29)$. Vielfache davon, zum Beispiel $(6|8|10)$, sind auch Tripel.

Die Umkehrung

Satz: Umkehrung des Satzes

Gilt in einem Dreieck mit der längsten Seite c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Beispiel 4: Rechtwinklig?

Sind Dreiecke mit den Seiten 6, 8, 10 und mit 5, 6, 8 rechtwinklig?

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$. Ja.

$5^2 + 6^2 = 61 \neq 64$. Nein.

Anwendungen

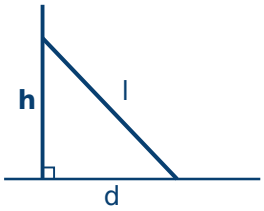
So gehst du vor: Sachaufgabe mit Pythagoras

1. Suche das rechtwinklige Dreieck. Hinweise sind Wörter wie Leiter, Diagonale, Abstand, Höhe, Seil.
2. Skizziere es und beschrifte die bekannten Seiten.
3. Entscheide: Ist die Hypotenuse gesucht (addieren) oder eine Kathete (subtrahieren)?
4. Rechne, runde sinnvoll und schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 5: Leiter

Eine 5 m lange Leiter steht 1,4 m von der Hauswand entfernt. Wie hoch reicht sie?

$h = \sqrt{5^2 - 1{,}4^2} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ m.



\n

Beispiel 6: Diagonale im Rechteck

Ein Rechteck ist 12 cm lang und 5 cm breit. Wie lang ist die Diagonale?

$d = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm. Für ein Quadrat mit der Seite a gilt $d = a\sqrt{2}$.

Beispiel 7: Gleichseitiges Dreieck

Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seite 6 cm. Wie groß sind Höhe und Fläche?

Die Höhe teilt es in zwei rechtwinklige Dreiecke: $h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5{,}20$ cm.

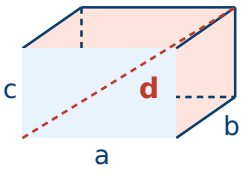
Fläche: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{27} \approx 15{,}59$ cm².

Beispiel 8: Abstand im Koordinatensystem

Berechne den Abstand von $A(1|2)$ und $B(7|10)$.

$\sqrt{(7-1)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$. Du bildest ein Steigungsdreieck und wendest den Satz an.

Der Satz in Körpern



\n

Beispiel 9: Raumdiagonale

Berechne die Raumdiagonale eines Quaders mit den Kanten 3, 4 und 12.

Diagonale der Grundfläche: $\sqrt{9 + 16} = 5$.

Raumdiagonale: $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Du wendest den Satz zweimal hintereinander an.

Hinweis

Beweisidee: Vier gleiche rechtwinklige Dreiecke werden in ein Quadrat mit der Seite $a+b$ gelegt. In der Mitte bleibt ein Quadrat mit der Seite c. Legst du die Dreiecke anders hin, bleiben zwei Quadrate mit den Seiten a und b. Die Restflächen sind gleich groß, also $c^2 = a^2 + b^2$. Handwerker stecken mit einer 12-teiligen Schnur ein 3-4-5-Dreieck ab und erhalten einen rechten Winkel.

Der Beweis mit dem Quadrat im Quadrat

Der Satz des Pythagoras lässt sich mit einem schönen Bild beweisen. Lege vier gleiche rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b in ein Quadrat mit der Seite $a+b$, sodass in der Mitte ein schiefes Quadrat mit der Seite c entsteht. Die Gesamtfläche ist $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Sie besteht aus dem inneren Quadrat c^2 und den vier Dreiecken mit zusammen $4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$. Ziehst du auf beiden Seiten $2ab$ ab, bleibt $a^2 + b^2 = c^2$.

Beispiel 10: Beweis mit Zahlen

Überprüfe den Beweis für $a = 5$ und $b = 12$.

Großes Quadrat: $(5+12)^2 = 289$. Vier Dreiecke: $4 \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = 120$. Inneres Quadrat: $289 - 120 = 169 = 13^2$. Also ist $c = 13$, und tatsächlich ist $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

Pythagoras im Koordinatensystem

Der Abstand zweier Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ ist die Hypotenuse eines Dreiecks mit den Katheten $|x_2 - x_1|$ und $|y_2 - y_1|$. Also gilt $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Mit dieser Formel kannst du Seitenlängen von Figuren im Koordinatensystem berechnen und prüfen, ob ein Dreieck rechtwinklig ist.

Beispiel 11: Rechter Winkel im Koordinatensystem

Zeige, dass das Dreieck $A(1|1)$, $B(7|1)$, $C(7|9)$ rechtwinklig ist, und berechne den Umfang.

$AB = 6$, $BC = 8$, $AC = \sqrt{36 + 64} = 10$. Es gilt $6^2 + 8^2 = 10^2$, also hat das Dreieck bei B einen rechten Winkel. Umfang: $6 + 8 + 10 = 24$.

Pythagoras im Raum

Bei Körpern wendest du den Satz mehrfach an. Zuerst bestimmst du eine Flächendiagonale, dann mit ihr und der Höhe die Raumdiagonale. Für einen Quader mit den Kanten a, b und c gilt $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Auch bei Pyramiden und Kegeln brauchst du den Satz für die Höhe der Seitenflächen.

Beispiel 12: Schachtel

Passt ein 50 cm langer Stab in eine Schachtel von 40 cm $\times$ 30 cm $\times$ 20 cm?

Die Raumdiagonale ist $\sqrt{1600 + 900 + 400} = \sqrt{2900} \approx 53{,}85$ cm. Weil $53{,}85 > 50$, passt der Stab schräg hinein.

Wurzeln und sinnvolles Runden

Oft ist die gesuchte Seite keine ganze Zahl. Dann benutzt du den Taschenrechner und rundest passend zur Aufgabe: Für eine Leiter reichen Zentimeter, für ein Schulheft Millimeter. Schreibe das Zwischenergebnis mit der Wurzel auf, zum Beispiel $\sqrt{41}$, und runde erst am Ende. Eine gute Probe: Die Hypotenuse muss länger sein als jede Kathete, aber kürzer als deren Summe.

Beispiel 13: Probe

Ein Schüler berechnet für $a = 4$ und $b = 5$ die Hypotenuse $c = 9$. Stimmt das?

Nein: c muss kleiner als $a + b = 9$ sein, also kann 9 nicht stimmen. Er hat addiert statt Quadrate zu bilden. Richtig ist $c = \sqrt{41} \approx 6{,}40$.

Wusstest du?

Es gibt über 370 verschiedene Beweise des Satzes des Pythagoras. Sogar ein amerikanischer Präsident, James Garfield, fand 1876 einen eigenen Beweis mit einem Trapez. Auf einer babylonischen Tontafel von etwa 1800 vor Christus (Plimpton 322) stehen Zahlentripel, die den Satz schon 1000 Jahre vor Pythagoras zeigen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Rechtwinkliges Dreieck: Katheten a, b am rechten Winkel, Hypotenuse c gegenüber, immer die längste Seite.
- Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$.
- Hypotenuse: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (addieren); Kathete: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ (subtrahieren).
- Umkehrung: Gilt $a^2 + b^2 = c^2$ für die längste Seite c, ist das Dreieck rechtwinklig.
- Pythagoreische Tripel wie $(3|4|5)$, $(5|12|13)$, $(8|15|17)$ und ihre Vielfachen.
- Anwendungen: Leiter, Diagonalen von Rechteck und Quader, Dachschrägen, Abstände im Koordinatensystem.
- Diagonale im Quadrat $d = a\sqrt{2}$; Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
- Skizze, rechter Winkel markieren, Hypotenuse bestimmen, rechnen, Antwortsatz mit Einheit.

Achtung

Bei einer gesuchten Kathete wird subtrahiert, nicht addiert. Die Hypotenuse liegt immer gegenüber dem rechten Winkel. Vergiss am Ende die Wurzel nicht: $c^2 = 25$ ist

noch nicht c. Bei der Umkehrung nimmst du die längste Seite als c. Wende den Satz nicht auf Dreiecke ohne rechten Winkel an.

Vertiefung: Den Satz des Pythagoras sicher anwenden

So gehst du vor: Pythagoras in Sachaufgaben

1. Fertige eine Skizze an und suche ein rechtwinkliges Dreieck. Oft entsteht es erst, wenn man eine Höhe, eine Diagonale oder eine senkrechte Wand einzeichnet.
2. Markiere den rechten Winkel. Die Seite gegenüber ist die Hypotenuse c, die längste Seite des Dreiecks.
3. Ist die Hypotenuse gesucht, addierst du die Quadrate der Katheten: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
4. Ist eine Kathete gesucht, subtrahierst du: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.
5. Prüfe das Ergebnis: Die Hypotenuse muss länger sein als jede Kathete, aber kürzer als beide zusammen.

Beispiel: Die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks

Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Schenkel 13 cm und die Basis 10 cm. Wie hoch ist es?

Die Höhe auf die Basis teilt das Dreieck in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke. In jedem ist der Schenkel die Hypotenuse (13 cm), die halbe Basis eine Kathete (5 cm) und die Höhe die andere Kathete. Also gilt $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\,\text{cm}$. Damit lässt sich auch die Fläche berechnen: $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60\,\text{cm}^2$.

Achtung: Die Wurzel aus einer Summe

Ein häufiger Fehler ist, die Wurzel gliedweise zu ziehen: $\sqrt{3^2 + 4^2}$ ist nicht $3 + 4 = 7$, sondern $\sqrt{25} = 5$. Erst werden die Quadrate addiert, dann wird aus dem Ergebnis die Wurzel gezogen. Ebenso gilt $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$. Die Probe zeigt den Fehler sofort: Eine Hypotenuse, die so lang ist wie beide Katheten zusammen, kann es nicht geben.

Schon gewusst?

Der Satz ist nach dem griechischen Mathematiker Pythagoras von Samos benannt, der um 570 v. Chr. lebte. Babylonische Schreiber kannten den Zusammenhang aber schon über tausend Jahre früher: Eine Tontafel mit dem Namen „Plimpton 322“ enthält eine ganze Liste pythagoreischer Zahlentripel. Auch ägyptische Landvermesser sollen mit einem Seil mit zwölf gleichen Abschnitten rechte Winkel abgesteckt haben, indem sie daraus ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 legten. Für den Satz gibt es heute mehrere hundert verschiedene Beweise.

Ottos Tipp

Skizziere das Dreieck und markiere den rechten Winkel. Die Seite gegenüber ist c. Frage dich: Ist c gesucht, dann plus, sonst minus. Zur Kontrolle: Die Hypotenuse muss länger sein als jede Kathete.